

**«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**  
Институт Перспективных исследований, кафедра «Высшая математика»

***Моделирование систем энергетики на  
основе полумарковских и скрытых  
марковских моделей***

**к.т.н., Сидоров Станислав Михайлович,  
д.т.н., профессор Обжерин Юрий Евгеньевич**



СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

«Цифровизация» технических систем, создание информационных систем управления ими и переход к интеллектуальному управлению и инжинирингу являются актуальными задачами теории и практики анализа и управления техническими системами на сегодняшний день и регламентируются на уровне правительства. Решение этих задач возможно на основе построения математических моделей, касающихся различных аспектов структуры и функционирования систем.

ЦЕЛЬ –

разработка и развитие метода построения скрытых марковских моделей (СММ) систем энергетики, допускающих построение полумарковских моделей, на основе использования вложенной цепи Маркова (ВЦМ) полумарковской модели системы, и применение этого метода для построения СММ, касающихся различных аспектов функционирования систем энергетики (надёжности, контроля, технического обслуживания, прогнозирования состояний).

Для достижения требуемых показателей необходимо регулярно оценивать и корректировать математическую модель, прогнозировать ее состояния на основе информации, получаемой в процессе функционирования технической системы.

В настоящее время для моделирования технических систем широко используются полумарковские процессы. Построено большое число полумарковских моделей, касающихся различных аспектов функционирования технических систем (надёжности, контроля, технического обслуживания, прогнозирования состояний системы). Для систем энергетики см. работы 1,2.

1. Руденко Ю.Н., Ушаков И.А. Надежность систем энергетики. 2-е изд., перераб. и доп. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. 328 с.
2. Igor A. Ushakov Probabilistic Reliability Models. 1st Edition. Wiley, 2012. 248 p.

При построении полумарковской модели необходимо ввести фазовое пространство состояний системы. В ряде случаев достаточно использовать конечное или счётное множество состояний, которые отражают физические состояния системы. Однако, в этих случаях модели описывают систему с "грубым" приближением, не учитывая все их свойства и особенности. Поэтому при построении полумарковской модели системы в фазовые состояния приходится вводить дополнительные непрерывные компоненты (содержащие важную информацию о функционировании системы), которые необходимы для более корректного построения модели.

Этими компонентами могут быть:

- 
- ✓ время, прошедшее с начала работы элемента системы;
  - ✓ время, оставшееся до окончания восстановления элемента системы;
  - ✓ время, оставшееся до проведения контроля системы;
  - ✓ величина оставшегося резерва времени и т.д.

В этом случае приходится использовать дискретно-непрерывное фазовое пространство состояний, а для построения полумарковской модели и анализа функционирования системы необходимо использовать ***теорию полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний***.

Следует отметить, что тематика исследований обладает широким спектром возможных приложений как в системах искусственного интеллекта, робототехнике, энергетике, так и в системах контроля окружающей среды, экономике, физике, биологии, социологии.

Важной составной частью полумарковского процесса является вложенная цепь Маркова (ВЦМ), которая отвечает за переходы между состояниями системы. Фазовое пространство состояний ВЦМ совпадает с фазовым пространством состояний полумарковского процесса. При функционировании системы энергетики, для которой построена полумарковская модель, не всегда возможно при изменениях её состояний полностью получить всю информацию, содержащуюся в кодах состояний, а есть только возможность получить некоторую информацию (сигнал), связанную с состояниями ВЦМ (полумарковской модели).

### фазовое пространство состояний

для каждого элемента системы указано находится он в рабочем состоянии или на восстановлении



### при функционировании системы

- можно получить сигнал только о числе работоспособных элементов системы
- можно получить сигнал только о том, в каком блоке элементов произошло изменения состояния системы, но не указан сам элемент

В этих случаях **состояния ВЦМ** (полумарковской модели) можно считать **скрытыми (ненаблюдаемыми)**. Возникают задачи оценки и корректировки полумарковской модели системы, анализа функционирования и прогнозирования состояний системы на основе, полученного в результате функционирования системы, вектора сигналов. Решение этих задач возможно на основе теории полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний и теории скрытых марковских моделей (СММ). (смотри 3)

## Марковские модели систем

- Получено большое число аналитических результатов
- Позволяют вычислять количественные характеристики надежности
- **Экспоненциальное распределение СВ, описывающих систему, на практике не всегда оправдано**

## Полумарковские модели систем

- ФР СВ, описывающих систему, имеют распределения общего вида
- Позволяют вычислять не только количественные характеристики надежности, но и временные
- Проблему размерности можно решить с помощью алгоритмов фазового укрупнения
- **Не всегда получается найти стационарное распределение**
- **Отсутствие результатов для многих реальных систем**

## Скрытые марковские модели систем

- Позволяют анализировать динамику системы
- Позволяют прогнозировать состояния системы
- Позволяют уточнять параметры системы по вектору сигналов
- **Отсутствие результатов для распределений общего вида и дискретно-непрерывного фазового пространства**
- **Нет общего подхода для технических систем**

## Применение полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний

Для задания полумарковских процессов используются процессы марковского восстановления [4].

Пусть  $(X, \mathcal{B})$  – измеримое пространство.

**Определение.** Процессом марковского восстановления (ПМВ) называется двухмерная цепь Маркова  $\{\xi_n, \theta_n; n \geq 0\}$  со значениями в  $X \times [0, \infty)$ , вероятность перехода которой определяется равенством

$$P\{\xi_{n+1} \in B, \theta_{n+1} \leq t / \xi_n = x\} = Q(t, x, B), \quad (B \in \mathcal{B}).$$

$Q(t, x, B)$  – полумарковское ядро (ПМ-ядро) в  $(X, \mathcal{B})$ .

Первая компонента  $\{\xi_n; n \geq 0\}$  ПМВ  $\{\xi_n, \theta_n; n \geq 0\}$  является цепью Маркова (ВЦМ), переходные вероятности которой определяются равенством:

$$P(x, B) = P\{\xi_{n+1} \in B / \xi_n = x\} = Q(+\infty, x, B),$$

Случайные величины  $\theta_n$ ,  $n \geq 0$ , определяют интервалы между моментами марковского восстановления

$$\tau_n : \tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k, \quad n \geq 1, \quad \tau_0 = 0.$$

Пусть  $v(t) : v(t) = \sup\{n : \tau_n \leq t\}$ .

**Определение.** Процесс  $\xi(t) = \xi_{v(t)}$  называется полумарковским процессом (ПМП), соответствующим ПМВ  $\{\xi_n, \theta_n ; n \geq 0\}$ .

ПМП является скачкообразным процессом, траектории которого непрерывны справа:  $\xi(t+0) = \xi(t)$ .

Каждое ПМ – ядро  $Q(t, x, B)$  представляется в виде:

$$Q(t, x, B) = \int_B G(t, x, y) P(x, dy), \quad G(t, x, y) = P\{\theta_{n+1} \leq t \mid \xi_n = x, \xi_{n+1} = y\}. \quad (1)$$

Часто используемым способом задания ПМП является следующий:

1. Задается стохастическое ядро  $P(x, B) = P\{\xi_{n+1} \in B \mid \xi_n = x\}$ ,
2. Задаются функции распределения времен пребывания на переходах ВЦМ

$$G(t, x, y) = G_{xy}(t) = P\{\theta_{n+1} \leq t \mid \xi_n = x, \xi_{n+1} = y\}.$$

Тогда ПМ-ядро  $Q(t, x, B)$  определяется по формуле (1).

Нахождение стационарных характеристик:

$$X = E_+ \cup E_-, \quad E_+ \cap E_- = \emptyset, \quad E_+ \in \mathcal{B}, E_- \in \mathcal{B},$$

где  $E_+$  - множество работоспособных состояний,  $E_-$  - множество отказовых состояний.

$$K_{\Gamma} = \frac{\int_{E_+} m(x) \rho(dx)}{\int_X m(x) \rho(dx)} \quad - \text{ стационарный коэффициент готовности}$$

$$T_+ = \frac{\int_{E_+} m(x) \rho(dx)}{\int_{E_+} P(x, E_-) \rho(dx)} \quad - \text{ среднее стационарное время безотказной работы}$$

$\rho(dx)$  – стационарное распределение ВЦМ  $\{\xi_n; n \geq 0\}$

$$\rho(B) = \int_X \rho(dx) P(x, B),$$

$m(x)$  – среднее время пребывания в состоянии  $x \in X$ .

Алгоритм стационарного фазового укрупнения [5].

Для построения укрупненной полумарковской модели необходимо:

- определить укрупненное фазовое пространство состояний  $\hat{E}$ , в соответствии с исходным;
- вычислить вероятности перехода между состояниями, входящими в  $\hat{E}$ ,
- вычислить средние времена пребывания в этих состояниях.

Разбивать фазовое пространство состояний  $E$  исходной модели на классы можно различными способами, используя основную идею: ***в классы объединяются однотипные состояния по определенному признаку, общему для них всех.***

$$\hat{p}_k^r = \int_{E_k} \rho(de) P(e, E_r) / \rho(E_k), \quad k, r = \overline{1, N},$$

$$\hat{m}_k = M \hat{\theta}_k = \int_{E_k} \rho(de) m(e) / \rho(E_k), \quad k = \overline{1, N},$$

где  $\rho(de)$  – стационарное распределение,  $P(e, E_r)$  – вероятности перехода ВЦМ,  $m(e)$  – средние времена пребывания в состояниях исходной системы.

## Применение скрытых марковских моделей к моделированию систем

**Определение** [6]. Предположим,  $(X_n; n = 1, 2, \dots)$  – цепь Маркова с переходными вероятностями  $p_{ij}, i, j = \overline{1, N}$  и начальным распределением  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$  и пусть  $J = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  – некоторое конечное множество сигналов.

Предположим, что когда цепь Маркова посещает состояние  $j$ , тогда независимо от предыдущих состояний и сигналов, испускается сигнал  $s$  с вероятностью  $p(s|j)$ ,

$$\sum_{s \in J} p(s|j) = 1,$$

$$P\{S_1 = s | X_1 = j\} = p(s|j),$$

$$P\{S_n = s | X_1, S_1, \dots, X_{n-1}, S_{n-1}, X_n = j\} = p(s|j).$$

*Модель рассматриваемого типа, в которой последовательность сигналов  $S_1, S_2, \dots$  наблюдается, в то время как последовательность состояний  $X_1, X_2, \dots$  ВЦМ не наблюдается, называется **моделью скрытой цепи Маркова**.*

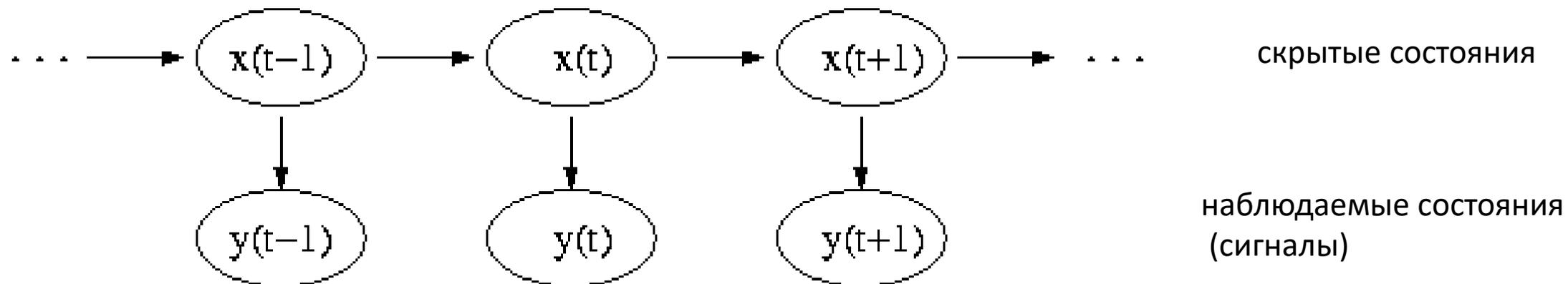
[6]. Sheldon M. Ross. Introduction to Probability Models. Twelfth Edition. –Academic Press, Elsevier, 2019. ISBN: 978-0-12-814346-9.

Скрытая марковская модель (СММ) позволяет нам говорить как о наблюдаемых событиях, так и о скрытых событиях, которые мы считаем причинными факторами в нашей вероятностной модели.

## СММ определяется следующими параметрами:

1. Матрицей  $P = [p_{ij}]$  – переходных вероятностей цепи Маркова  $(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$ , состояния которой считаются скрытыми;
2. Матрицей  $B = [p(s|j)]$ , которая устанавливает вероятностную связь между скрытыми состояниями и сигналами;
3. Начальным распределением  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$  цепи Маркова.

Сокращенно параметры СММ задаются в виде  $\lambda = (P, B, \pi)$ .



## Основные задачи теории СММ:

задана наблюдаемая последовательность и модель  $\lambda=(P,V,\pi)$ .



**Задача 1 (Problem 1 - Likelihood):** Необходимо вычислить вероятность  $P(O|\lambda)$  – вероятность того, насколько хорошо данная наблюдаемая последовательность согласуется с моделью.

**Решение:** алгоритм прямого хода (**the forward algorithm**).



**Задача 2 (Problem 2 - Decoding):** Необходимо подобрать последовательность состояний системы таким образом, чтобы она лучше всего описывала наблюдаемую последовательность.

**Решение:** алгоритм Витерби (**the Viterbi algorithm**).



**Задача 3 (Problem 3 - Learning):** Подобрать параметры  $\lambda=(P,V,\pi)$  модели таким образом, чтобы максимизировать значение вероятности  $P(O|\lambda)$ .

**Решение:** алгоритм «прямого-обратного хода», или алгоритм Баума-Велша (**Forward-Backward algorithm**).

## Алгоритм построения СММ на основе укрупненной полумарковской модели [7]

Построить полумарковскую модель системы



Применить алгоритм стационарного фазового укрупнения, т.е. определить  $\hat{E}$ ,  $\hat{P}_i^j$



Определить параметры СММ образом:

множество состояний  
модели  $\hat{E}$

Задать множество  
сигналов  $J$

Задать начальное  
распределение

Матрица переходных вероятностей  
будет состоять из вероятностей  $\hat{P}_i^j$

Задать функцию связи  $R(s|x)$   
состояний модели с сигналами

[7]. Сидоров С.М. Полумарковские и скрытые марковские модели систем с резервом времени – дис. канд. техн. наук, 2021 г.

# 1. ПРИМЕНЕНИЕ СУПЕРПОЗИЦИИ НЕЗАВИСИМЫХ ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ К МОДЕЛИРОВАНИЮ СИСТЕМ ЭНЕРГЕТИКИ

Система состоит из  $N$  независимых элементов (подсистем), функционирование каждого из которых описывается полумарковским процессом  $\xi^{(i)}(t)$  с произвольным фазовым пространством  $Z^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

Для каждого  $Z^{(i)}$  имеет место разбиение  $Z^{(i)} = Z_1^{(i)} \cup Z_0^{(i)}$ ,  $Z_1^{(i)} \cap Z_0^{(i)} = \emptyset$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

Пусть

$$\varsigma_{Z_1^{(i)}}(\xi^{(i)}(t)) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi^{(i)}(t) \in Z_1^{(i)}, \\ 0, & \text{если } \xi^{(i)}(t) \in Z_0^{(i)}, \end{cases} \quad \varsigma(t) = \{\varsigma_1(t), \varsigma_2(t), \dots, \varsigma_N(t)\}$$

Векторный процесс  $\varsigma(t)$  характеризует состояния системы в момент времени  $t$  по состояниям работоспособности или неработоспособности её элементов (подсистем). Множество возможных значений процесса  $\varsigma(t)$  есть множество двоичных векторов  $\bar{d} = (d_1, d_2, \dots, d_N)$  от  $(00\dots 0)$  до  $(11\dots 1)$ , обозначим его  $D = \{\bar{d}\}$ .

Рассмотрим понятие отказа системы: на множестве значений двоичных векторов  $D$  задаётся функция  $g(d)$  такая что:

$$g(\bar{d}) = \begin{cases} 1, & \text{если система работоспособна при данном} \\ & \text{сочетании состояний её элементов,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим множество значений вектора  $\bar{d}$ , при которых система работоспособна,  $D_1$ , а множество значений, при которых система неработоспособна,  $D_0$ , то есть  $D_1 = \{\bar{d}: g(\bar{d}) = 1\}$ ,  $D_0 = \{\bar{d}: g(\bar{d}) = 0\}$ , по предположению,  $D = D_1 \cup D_0$ ,  $D_1 \cap D_0 = \emptyset$ .

В [8,9] построена суперпозиция независимых ПМП  $\xi^{(i)}(t)$ ,  $i = \overline{1, N}$  и представлены следующие формулы:

$$T_1 = \sum_{\bar{d} \in D_1} \prod_{i=1}^N T_{d_i}^{(i)} \left\{ \sum_{\bar{d} \in D_1} \prod_{i=1}^N T_{d_i}^{(i)} \sum_{j \in G(\bar{d})} \frac{1}{T_1^{(j)}} \right\}^{-1} = \sum_{\bar{d} \in D_1} \prod_{i=1}^N T_{d_i}^{(i)} \left\{ \sum_{\bar{d} \in D_0} \prod_{i=1}^N T_{d_i}^{(i)} \sum_{j \in I(\bar{d})} \frac{1}{T_0^{(j)}} \right\}^{-1}$$

средняя  
стационарная  
наработка на отказ

$$T_0 = \sum_{\bar{d} \in D_0} \prod_{i=1}^N T_{d_i}^{(i)} \left\{ \sum_{\bar{d} \in D_1} \prod_{i=1}^N T_{d_i}^{(i)} \sum_{j \in G(\bar{d})} \frac{1}{T_1^{(j)}} \right\}^{-1} = \sum_{\bar{d} \in D_0} \prod_{i=1}^N T_{d_i}^{(i)} \left\{ \sum_{\bar{d} \in D_0} \prod_{i=1}^N T_{d_i}^{(i)} \sum_{j \in I(\bar{d})} \frac{1}{T_0^{(j)}} \right\}^{-1}$$

среднее стационарное  
время восстановления

$$K_r = \sum_{\bar{d} \in D_1} \prod_{i=1}^N T_{d_i}^{(i)} \left\{ \prod_{i=1}^N (T_1^{(i)} + T_0^{(i)}) \right\}^{-1}$$

стационарный коэффициент готовности

где  $T_1^{(i)}$  – средняя стационарная наработка на отказ  $i$ -го элемента (подсистемы);  $T_0^{(i)}$  – среднее стационарное время

восстановления  $i$ -го элемента (подсистемы):  $T_{d_i}^{(i)} = \begin{cases} T_1^{(i)}, & \text{если } d_i = 1, \\ T_0^{(i)}, & \text{если } d_i = 0, \end{cases}$

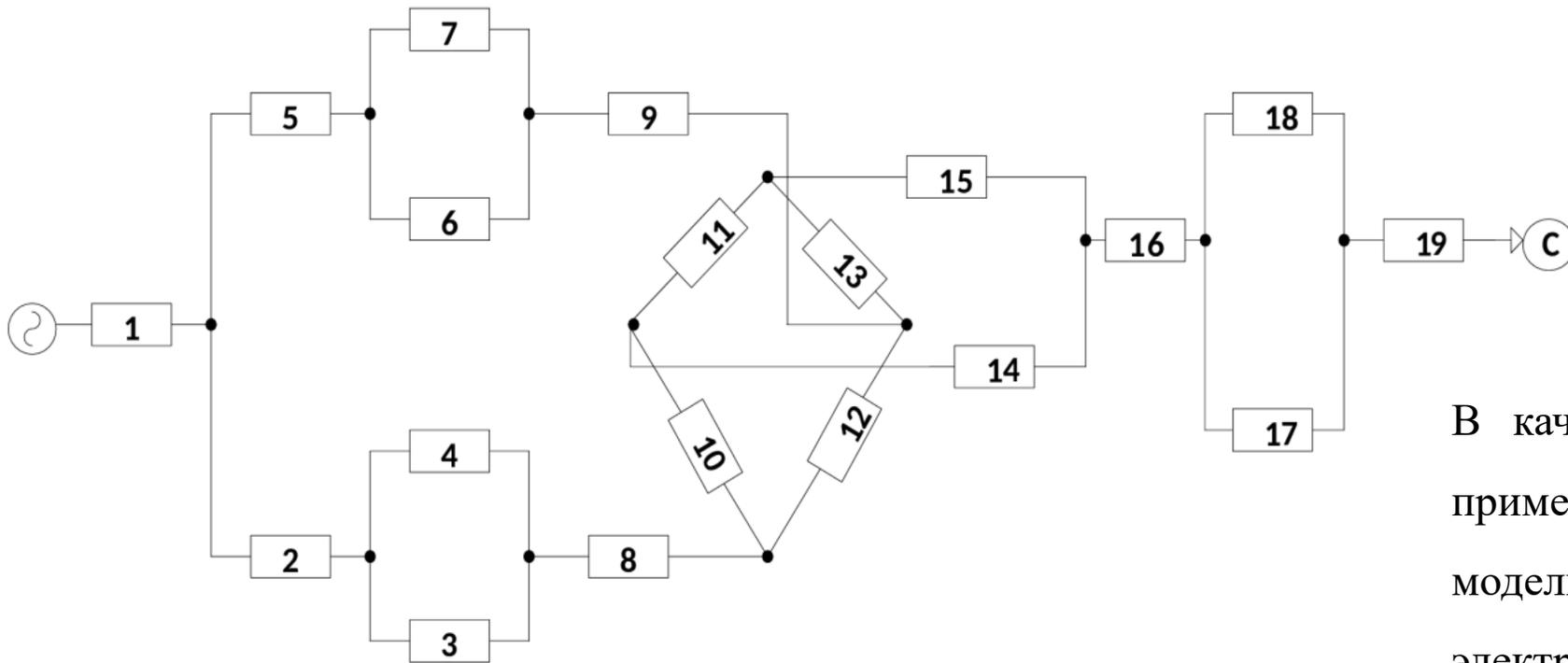


Рис. 1.1. Структурная схема электроэнергетической системы

В качестве иллюстративного примера применения формул (1) – (3) для моделирования систем электроэнергетики найдём характеристики надёжности электроэнергетической системы, структурная схема которой представлена на рисунке 1.1, а показатели надёжности её элементов содержатся в таблице.

№	Элементы системы	$T_+$ , г.	$T_-$ , г.	$K_r$
1	Выходная шина электростанции	3,0	0,04	0,9868
2	Входная шина подстанции А	1,5	0,031	0,9797
3	Трансформатор 1 подстанции А	1,7	0,027	0,9843
4	Трансформатор 2 подстанции А	0,9	0,033	0,9646
5	Входная шина подстанции В	2,1	0,02	0,9906
6	Трансформатор 1 подстанции В	1,1	0,018	0,9839
7	Трансформатор 2 подстанции В	1,5	0,01	0,9934
8	Выходная шина подстанции А	1,4	0,014	0,9901
9	Выходная шина подстанции В	1,3	0,017	0,9871
10	Выключатель	0,5	0,037	0,9311
11	Выключатель	0,36	0,016	0,9574
12	Выключатель	0,6	0,025	0,9600
13	Выключатель	0,8	0,015	0,9816
14	Линия электропередачи	1,2	0,0014	0,9988
15	Линия электропередачи	2,1	0,0015	0,9993
16	Входная шина подстанции С	0,5	0,028	0,9470
17	Трансформатор 1 подстанции С	1,0	0,021	0,9794
18	Трансформатор 2 подстанции С	1,1	0,024	0,9786
19	Выходная шина подстанции С	2,0	0,009	0,9955

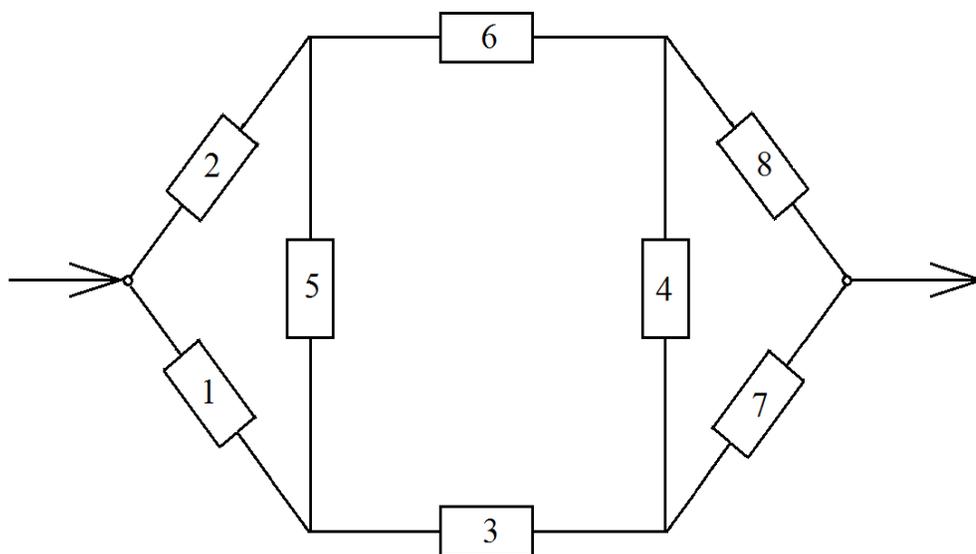
Нахождение характеристик рассматриваемой системы с использованием формул (1) – (3) осуществляется по следующей схеме:

**1.** Параллельные элементы 3, 4, а также 6, 7 укрупняются до одного элемента.

**2.** Последовательные элементы 2, 8 и результат укрупнения 3 и 4, а также 5, 9 и результат укрупнения 6 и 7 укрупняются до одного элемента.

В результате получим укрупнённую подсистему, структурная схема которой представлена на рисунке 1.2.

На рисунке 1.2 элемент 1 соответствует результату укрупнения элементов 2, 3, 4, 8 исходной схемы, элемент 2 – результату укрупнения элементов 5, 6, 7, 9 исходной схемы. Элементы 3 – 8 соответствуют элементам 10 – 15 исходной схемы. Характеристики надёжности полученной укрупнённой подсистемы представлены в таблице 1.2.



**Рис. 1.2.** Структурная схема укрупнённой подсистемы

**Таблица 1.2.** Показатели надёжности элементов укрупнённой подсистемы

Элементы подсистемы	$T_+, г.$	$T_-, г.$	$K_T$
1	0,7051	0,02217	0,9695
2	0,7924	0,01809	0,9777
3	0,5000	0,03700	0,9311
4	0,3600	0,01600	0,9574
5	0,6000	0,02500	0,9600
6	0,8000	0,01500	0,9816
7	1,2000	0,001400	0,9988
8	2,1000	0,001500	0,9993

3. В результате применения к подсистеме формул (1) – (3), (множество  $D_1$  содержит 84 вектора,  $D_0$  – 172 вектора), получим характеристики надёжности подсистемы  $T_+ = 4,978$  г.,  $T_- = 0,01013$  г.,  $K_T = 0,9980$ .

4. Подсистема из параллельных элементов 17 – 18 укрупняется до одного элемента, для неё получаем  $T_+ = 25,4911$  г.,  $T_- = 0,01120$  г.,  $K_T = 0,9996$ .

5. Представив исходную систему в виде последовательного соединения двух рассчитанных ранее подсистем между собой и с элементами 1, 16 и 19 исходной системы, укрупним их до одного элемента с характеристиками надёжности

$$T_+ = 0,3254 \text{ г.}, \quad T_- = 0,02523 \text{ г.}, \quad K_T = 0,9280.$$

Таким образом, для рассматриваемой системы

$$T_+ = 0,3254 \text{ г.}, \quad T_- = 0,02523 \text{ г.}, \quad K_T = 0,9280.$$

Такой же результат для  $K_T$  рассматриваемой системы получается методом структурных функций [10].

## 2. Модели систем энергетики с резервом времени

**Временное резервирование** — это метод повышения надёжности и эффективности систем, при котором системе в процессе функционирования предоставляется возможность израсходовать некоторое дополнительное время (резерв времени) на восстановление характеристик. Для систем с временным резервированием нарушение работоспособности системы не обязательно сопровождается отказом системы, так как имеется возможность восстановить работоспособность системы за резервное время.

#### **Резерв времени может создаваться за счёт:**

- увеличения времени, выделяемого системе для выполнения задания и называемого оперативным временем .
- создания запаса производительности всей системы или отдельных её элементов.
- функциональной инерционности.

#### **Источники резерва времени:**

1. Подземные хранилища нефти и газа.
2. Накопители энергии большой емкости.
3. Промежуточные накопители.
4. Хранилища информации.

Существенный вклад в исследования систем с резервом времени внесли Креденцер Б.П., Черкесов Г.Н., Копп В.Я., Обжерин Ю.Е., Песчанский А.И. Вопросам исследования систем с РВ посвящены работы Бобовича Л.М., Гениса Я.Г, Гильмана А.С., Дружинина Г.В., Зедгенидзе Г.Г., Зеленцова В.А., Харченко В.С., Новикова Е.В., Ушакова И.А., Калимулиной Э.Ю. и др. Исследования зарубежных авторов представлены в работах Barnes A.K. et. al., Birolini A., Dong W. et. al., Jia X. et. al., Kakubava R.V., Khurodze R.A., Kumar G. et. al., Kumar V.P., Wang S.J., Mendes A.A. et. al., Wu X., Hillston J., Wu X., Yu H., Yan H. et. al., Yao D.D., Vuzacott J.A. и др.

## Полумарковские модели двухкомпонентных систем с поэлементным резервом времени

Для описания функционирования системы  $S$  используем полумарковский процесс  $\xi(t)$ . Введем пространство состояний вида:

$$E = \{ 1, i\bar{d}x : \bar{d} = (d_1, d_2), x > 0 \},$$

$$d_k = \begin{cases} 0, & \text{если } k\text{-ый элемент находится в отказе,} \\ 1, & \text{если } k\text{-ый элемент работоспособен,} \\ \bar{1}, & \text{если } k\text{-ый элемент восстанавливается,} \\ & \text{функционирует за счет резерва времени.} \end{cases}$$

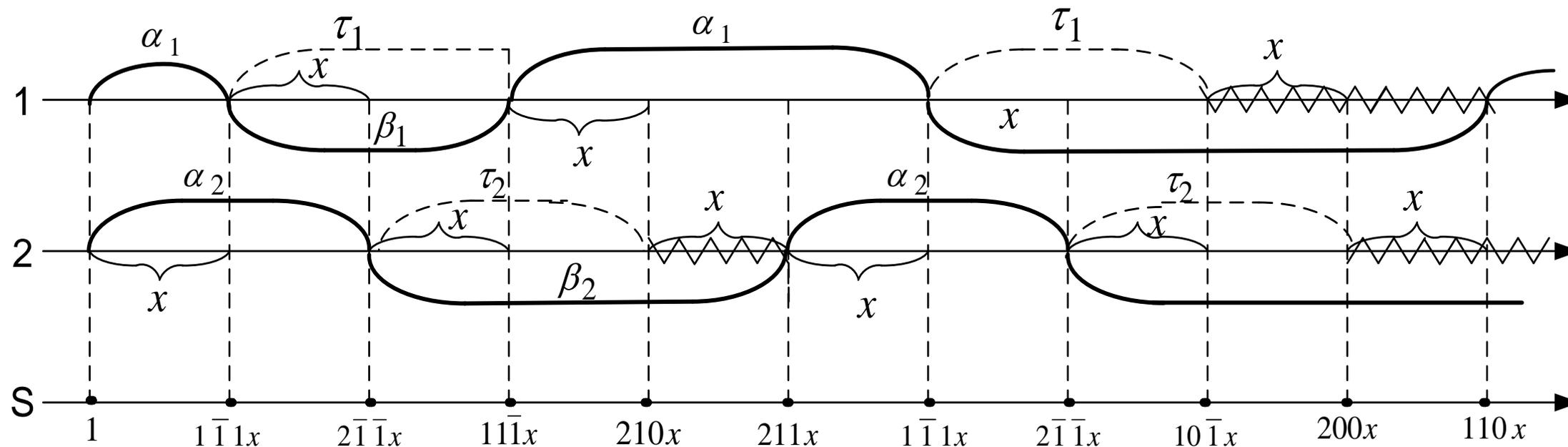


Рисунок 2.1 – Временная диаграмма функционирования системы.

Рассмотрим параллельное соединение компонентов системы. В этом случае

$$E_- = \{100x, 200x\}, \quad E_+ = \{id\bar{x} : \bar{d} = (d_1, d_2), \bar{d} \neq (0, 0), x > 0\}.$$

Выпишем полученные формулы для характеристик надежности рассматриваемой системы:

$$K_{\Gamma} = \frac{T_+}{T_+ + T_-}, \quad T_- = \frac{M([\beta_1 - \tau_1]^+)M([\beta_2 - \tau_2]^+)}{M([\beta_1 - \tau_1]^+) + M([\beta_2 - \tau_2]^+)}, \quad (2.1)$$

$$T_+ = \frac{p_1 M([\beta_1 - \tau_1]^+) (M\alpha_2 + M(\beta_2 \wedge \tau_2)) + p_2 M([\beta_2 - \tau_2]^+) (M\alpha_1 + M(\beta_1 \wedge \tau_1)) + (M\alpha_1 + M(\beta_1 \wedge \tau_1)) (M\alpha_2 + M(\beta_2 \wedge \tau_2))}{p_1 p_2 (M([\beta_1 - \tau_1]^+) + M([\beta_2 - \tau_2]^+))}.$$

$$p_i = P(\beta_i > \tau_i) = \int_0^{\infty} \bar{G}_i(t) r_i(t) dt$$

$$M([\beta_i - \tau_i]^+) = \int_0^{\infty} \bar{G}_i(t) R_i(t) dt / P(\beta_i > \tau_i)$$

$$M(\beta_i \wedge \tau_i) = \int_0^{\infty} \bar{G}_i(t) \bar{R}_i(t) dt$$

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t)$$

Параллельное соединение. Времена безотказной работы  $M\alpha_1 = 8,33$  ч.,  $M\alpha_2 = 6,25$  ч., времена восстановления  $M\beta_1 = 0,71$  ч.,  $M\beta_2 = 0,83$  ч. Каждый элемент имеет неслучайный РВ,  $h_1 + h_2 = 0,7$ .

$h_1$	$h_2$	$T_-(h_1, h_2)$	$T_+(h_1, h_2)$	$K_{\Gamma}(h_1, h_2)$
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0,385</b>	<b>49,551</b>	<b>0,9923</b>
<b>0</b>	<b>0,7</b>	<b>0,241</b>	<b>102,274</b>	<b>0,99765</b>
<b>0,1</b>	<b>0,6</b>	<b>0,241</b>	<b>91,035</b>	<b>0,99736</b>
<b>0,2</b>	<b>0,5</b>	<b>0,238</b>	<b>84,365</b>	<b>0,99719</b>
<b>0,3</b>	<b>0,4</b>	<b>0,233</b>	<b>82,291</b>	<b>0,99717</b>
<b>0,4</b>	<b>0,3</b>	<b>0,228</b>	<b>85,172</b>	<b>0,99733</b>
<b>0,5</b>	<b>0,2</b>	<b>0,224</b>	<b>93,617</b>	<b>0,99762</b>
<b>0,6</b>	<b>0,1</b>	<b>0,219</b>	<b>108,69</b>	<b>0,99799</b>
<b>0,7</b>	<b>0</b>	<b>0,214</b>	<b>132,3</b>	<b>0,99839</b>

## Стационарное фазовое укрупнение двухкомпонентной системы

Для построения упрощенной модели функционирования рассматриваемой системы используем алгоритм стационарного фазового укрупнения

$$\hat{p}_k^r = \int_{E_k} \rho(de) P(e, E_r) / \rho(E_k), \quad k, r = \overline{1, N} \quad \hat{m}_k = M \hat{\theta}_k = \int_{E_k} \rho(dx) m(x) / \rho(E_k), \quad k = \overline{1, N}$$

Введем следующие классы состояний:

$$E_0 = \{100x; 200x\} \quad E_1 = \{210x; 101x; 10\bar{1}x; 2\bar{1}0x; 20\bar{1}x; 1\bar{1}0x; 201x; 110x\}$$

$$E_2 = \{1\bar{1}1x; 111x; 211x; 21\bar{1}x; 2\bar{1}\bar{1}x; 1\bar{1}\bar{1}x; 11\bar{1}x; 2\bar{1}1x\}$$

**Стационарное распределение укрупненной ВЦМ имеет вид :**

$$\hat{\rho}_0 = \frac{\hat{p}_1^0 \hat{p}_2^1}{\hat{p}_2^1 + \hat{p}_1^2 + \hat{p}_1^0 \hat{p}_2^1} \quad \hat{\rho}_1 = \frac{\hat{p}_2^1}{\hat{p}_2^1 + \hat{p}_1^2 + \hat{p}_1^0 \hat{p}_2^1} \quad \hat{\rho}_2 = \frac{\hat{p}_1^2}{\hat{p}_2^1 + \hat{p}_1^2 + \hat{p}_1^0 \hat{p}_2^1}$$

Зная стационарное распределение укрупненной ВЦМ определим характеристики надежности укрупненной системы:

$$\hat{T}_+ = \frac{\hat{m}_1 \hat{\rho}_1 + \hat{m}_2 \hat{\rho}_2}{\hat{\rho}_0} \quad \text{средняя стационарная наработка системы на отказ}$$

$$\hat{T}_- = \hat{m}_0 \quad \text{среднее стационарное время восстановления системы}$$

$$\hat{K}_\Gamma = \frac{\hat{T}_+}{\hat{T}_+ + \hat{T}_-} = \frac{\hat{m}_1 \hat{\rho}_1 + \hat{m}_2 \hat{\rho}_2}{\hat{m}_1 \hat{\rho}_1 + \hat{m}_2 \hat{\rho}_2 + \hat{m}_0 \hat{\rho}_0} \quad \text{стационарный коэффициент готовности}$$

где

$$\hat{m}_0 = \frac{p_1 p_2 M([\beta_1 - \tau_1]^+) M([\beta_2 - \tau_2]^+)}{p_1 \int_0^\infty \bar{G}_2(x) R_2(x) dx + p_2 \int_0^\infty \bar{G}_1(x) R_1(x) dx}$$

$$\hat{m}_1 = \frac{\left[ p_1 M([\beta_1 - \tau_1]^+) (M\alpha_2 + M(\beta_2 \wedge \tau_2)) + p_2 M([\beta_2 - \tau_2]^+) (M\alpha_1 + M(\beta_1 \wedge \tau_1)) \right]}{p_1 (M\alpha_2 + M(\beta_2 \wedge \tau_2)) + p_2 (M\alpha_1 + M(\beta_1 \wedge \tau_1)) + 2 \left[ \int_0^\infty \bar{G}_2(x) R_2(x) dx + \int_0^\infty \bar{G}_1(x) R_1(x) dx \right]}$$

$$\hat{m}_2 = \frac{M\alpha_1 M\alpha_2 + M\alpha_1 M(\beta_2 \wedge \tau_2) + M\alpha_2 M(\beta_1 \wedge \tau_1) + M(\beta_1 \wedge \tau_1) M(\beta_2 \wedge \tau_2)}{2 \left[ M\alpha_1 + M(\beta_1 \wedge \tau_1) + M\alpha_2 + M(\beta_2 \wedge \tau_2) \right]}$$

Рассматривается параллельное соединение компонентов без их отключения.

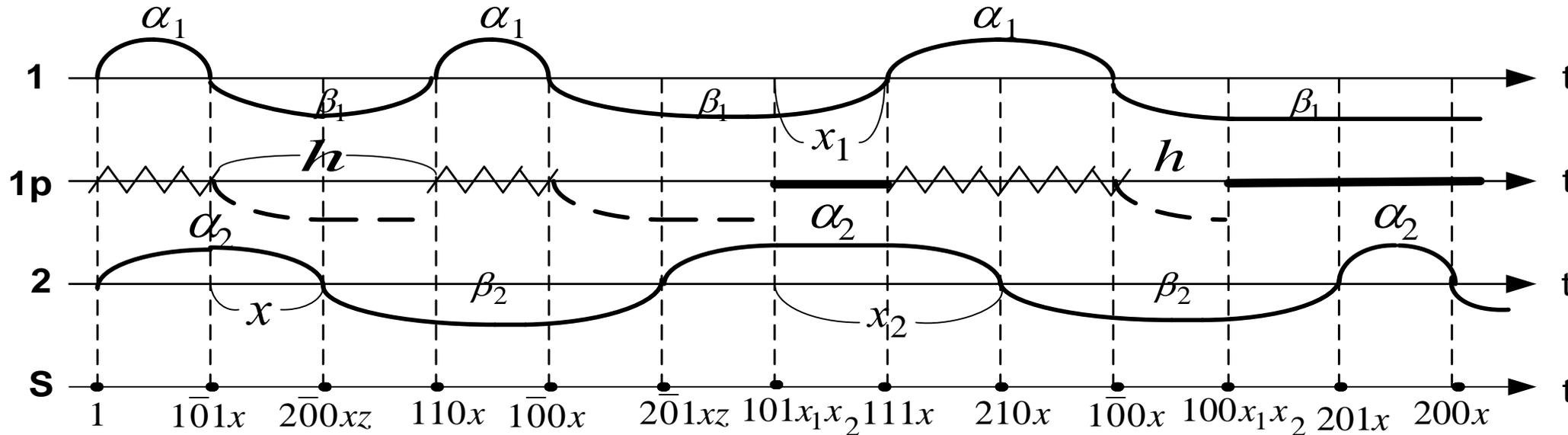


Рисунок 2.2 – Временная диаграмма функционирования системы

$$T_+ \approx \frac{M\alpha_1 M\alpha_2 + \int_0^h \bar{F}_2(x) dx \int_0^x \bar{G}_1(t) dt + \int_0^h \bar{G}_1(t) dt \int_h^\infty \bar{F}_2(x) dx + \int_0^\infty \bar{F}_1(x) dx \int_0^x \bar{G}_2(t) dt}{\bar{G}_1(h) \left( \int_0^h \bar{F}_2(x) \bar{G}_2(h-x) dx + \int_0^\infty \bar{F}_1(x) \bar{G}_2(x+h) dx \right)}. \quad K_\Gamma = \frac{T_+}{T_+ + T_-}. \quad (2.2)$$

$$T_- \approx \frac{\int_h^\infty \bar{G}_1(y) dy \int_0^\infty \bar{F}_1(x) \bar{G}_2(x+y) dx + \int_h^\infty \bar{G}_1(y) dy \int_0^h \bar{F}_2(x) \bar{G}_2(y-x) dx}{\bar{G}_1(h) \left( \int_0^h \bar{F}_2(x) \bar{G}_2(h-x) dx + \int_0^\infty \bar{F}_1(x) \bar{G}_2(x+h) dx \right)}.$$

Параллельное соединение. Времена безотказной работы  $M\alpha_1 = 8,33$  ч.,  $M\alpha_2 = 6,25$  ч., времена восстановления  $M\beta_1 = 0,71$  ч.,  $M\beta_2 = 0,83$  ч. Резерв времени  $h$  неслучайный.

Точное значение вычисляется по формулам (2.1), при  $h_2=0$ , а приближенное – по (2.2).

h	$T_+$	$T_-$	$K_\Gamma$
0	70,347	0,393	0,99444
0,1	71,143	0,359	0,99498
0,2	72,851	0,322	0,99561
0,3	77,308	0,287	0,9963
0,4	86,281	0,259	0,99701
0,5	101,574	0,236	0,99768
0,6	125,693	0,219	0,99826
0,7	162,566	0,206	0,99873

h	Точные формулы	Приближенные формулы	Разница
0	0,99230	0,99444	0,00214
0,1	0,99324	0,99498	0,00174
0,2	0,99421	0,99561	0,0014
0,3	0,99520	0,99630	0,0011
0,4	0,99615	0,99701	0,00086
0,5	0,99702	0,99768	0,00066
0,6	0,99777	0,99826	0,00049
0,7	0,99839	0,99873	0,00034

## Многокомпонентная система с поэлементным мгновенно пополняемым резервом времени

$$\rho(i\bar{x}) = \rho_0 \prod_{k=1}^N \rho_{d_k}^{(k)} \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N \bar{V}_{d_j}^{(j)}(x_j) \quad \text{найдено стационарное распределение ВЦМ, где}$$

$$\rho_z^{(k)} = \begin{cases} \rho^{(k)}, & \text{если } z = 1, \bar{1}, \\ \bar{\rho}^{(k)}, & \text{если } z = 0, \end{cases} \quad \rho^{(k)} = \frac{1}{2 + P(\beta_k > \tau_k)}, \quad \bar{\rho}^{(k)} = \rho^{(k)} \cdot P(\beta_k > \tau_k)$$

$$V_z^{(k)}(t) = P(\delta_z^{(k)} < t) \quad \text{ФР СВ } \delta_z^{(k)} \quad \bar{V}_z^{(k)}(t) = 1 - V_z^{(k)}(t)$$

$$v_z^{(k)}(t) \quad \text{плотности распределения вероятностей СВ } \delta_z^{(k)}$$

$$v_1^{(k)}(t) = f_k(t) \quad v_{\bar{1}}^{(k)}(t) = \bar{R}_k(t)g_k(t) + \bar{G}_k(t)r_k(t) \quad v_0^{(k)}(t) = \int_0^\infty g_k(x+t)r_k(x)dx / P(\beta_k > \tau_k)$$

$$\text{СВ } \delta_z^{(k)} = \begin{cases} \alpha_k, & \text{если } z = 1, \\ \beta_k \wedge \tau_k, & \text{если } z = \bar{1} \\ [\beta_k - \tau_k]^+, & \text{если } z = 0, \end{cases} \quad P([\beta_k - \tau_k]^+ \leq t) = 1 - \frac{\int_0^\infty \bar{G}_k(y+t)r_k(y)dy}{P(\beta_k > \tau_k)}$$

Рассмотрим понятие отказа системы: исходя из анализа структуры системы, на множестве всех векторов  $D = \{\bar{d}\}$  задается структурная функция

$$g(\bar{d}) = \begin{cases} 1, & \text{если система работоспособна} \\ \text{при данном сочетании компонентов вектора } \bar{d}; \\ 0, & \text{если система в отказе.} \end{cases}$$

$D_+ = \{\bar{d} : g(\bar{d}) = 1\}$  – множество значений вектора  $\bar{d}$ , при котором система работоспособна

$D_- = \{\bar{d} : g(\bar{d}) = 0\}$  – множество значений вектора  $\bar{d}$ , при котором система находится в отказе

**Стационарный коэффициент готовности равен:**

$$K_T = \frac{\sum_{\bar{d} \in D_+} \prod_{k:d_k=1} M \alpha_k \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} M (\beta_k \wedge \tau_k) \cdot \prod_{k:d_k=0} P(\beta_k > \tau_k) M([\beta_k - \tau_k]^+)}{\prod_{k=1}^N (M \alpha_k + M \beta_k)}.$$

$D_-^1$  — множество векторов  $\bar{d} \in D_-$  таких, что изменение в состоянии одной компоненты переводит систему в работоспособное состояние (в  $D_+$ ).

$D_+^0$  — аналогично  $D_-^1$

$G(\bar{d})$  — множество номеров компонент вектора  $\bar{d} \in D_+^0$ , изменение значения каждой из которых переводит вектор  $\bar{d}$  в  $D_-$ .

$$T_+ = \frac{\sum_{\bar{d} \in D_+} \prod_{k:d_k=1} M \alpha_k \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} M (\beta_k \wedge \tau_k) \cdot \prod_{k:d_k=0} P(\beta_k > \tau_k) M([\beta_k - \tau_k]^+)}{\sum_{\bar{d} \in D_+^0} \sum_{j \in G(\bar{d})} I(d_j) \cdot \prod_{\substack{k:d_k=1, \\ k \neq j}} M \alpha_k \cdot \prod_{\substack{k:d_k=\bar{1}, \\ k \neq j}} M (\beta_k \wedge \tau_k) \cdot \prod_{\substack{k:d_k=0, \\ k \neq j}} P(\beta_k > \tau_k) M([\beta_k - \tau_k]^+)},$$

$$T_- = \frac{\sum_{\bar{d} \in D_-} \prod_{k:d_k=1} M \alpha_k \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} M (\beta_k \wedge \tau_k) \cdot \prod_{k:d_k=0} P(\beta_k > \tau_k) M([\beta_k - \tau_k]^+)}{\sum_{\bar{d} \in D_+^0} \sum_{j \in G(\bar{d})} I(d_j) \cdot \prod_{\substack{k:d_k=1, \\ k \neq j}} M \alpha_k \cdot \prod_{\substack{k:d_k=\bar{1}, \\ k \neq j}} M (\beta_k \wedge \tau_k) \cdot \prod_{\substack{k:d_k=0, \\ k \neq j}} P(\beta_k > \tau_k) M([\beta_k - \tau_k]^+)},$$

$$I(d_j) = \begin{cases} P(\beta_j > \tau_j), & \text{если } d_j = \bar{1}, \\ 1, & \text{если } d_j = 1, 0. \end{cases}$$

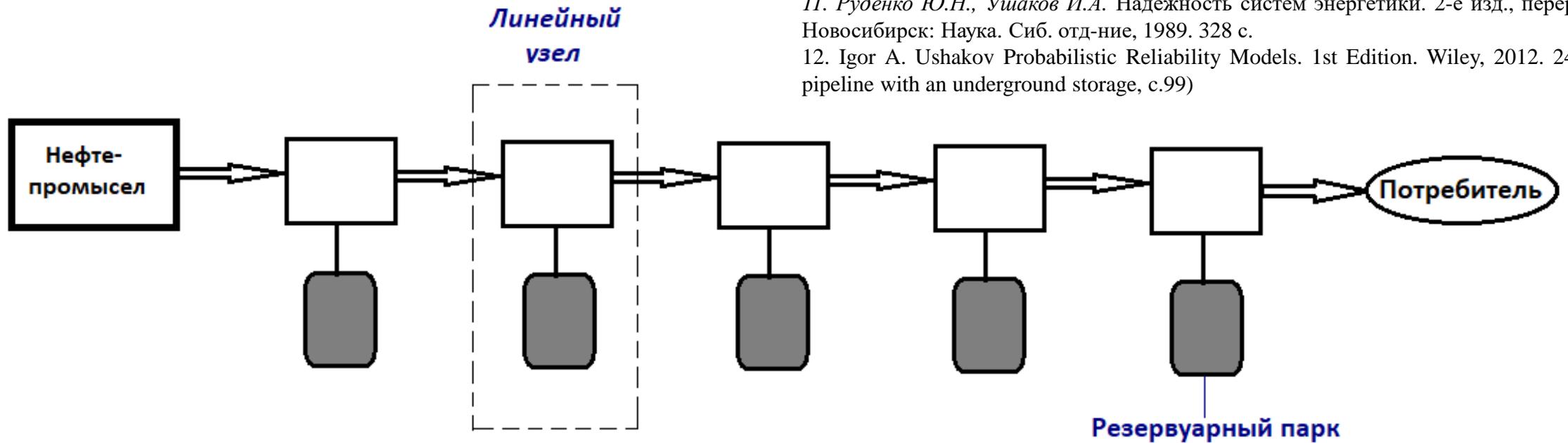
Если  $c_1$  - прибыль, получаемая в единицу времени исправного функционирования системы, а  $c_2$  - потери в единицу времени отказа, то

**Средняя удельная прибыль  $S$  в единицу календарного времени равна**

$$S = \frac{c_1 \sum_{\bar{d} \in D_+} \prod_{k:d_k=1} M \alpha_k \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} M (\beta_k \wedge \tau_k) \cdot \prod_{k:d_k=0} P(\beta_k > \tau_k) M([\beta_k - \tau_k]^+)}{\prod_{k=1}^N (M \alpha_k + M \beta_k)} - \frac{-c_2 \sum_{\bar{d} \in D_-} \prod_{k:d_k=1} M \alpha_k \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} M (\beta_k \wedge \tau_k) \cdot \prod_{k:d_k=0} P(\beta_k > \tau_k) M([\beta_k - \tau_k]^+)}{\prod_{k=1}^N (M \alpha_k + M \beta_k)},$$

**а средние удельные затраты  $C$  в единицу исправного времени функционирования имеют вид**

$$C = \frac{c_2 \sum_{\bar{d} \in D_-} \prod_{k:d_k=1} M \alpha_k \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} M (\beta_k \wedge \tau_k) \cdot \prod_{k:d_k=0} P(\beta_k > \tau_k) M([\beta_k - \tau_k]^+)}{\sum_{\bar{d} \in D_+} \prod_{k:d_k=1} M \alpha_k \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} M (\beta_k \wedge \tau_k) \cdot \prod_{k:d_k=0} P(\beta_k > \tau_k) M([\beta_k - \tau_k]^+)},$$



11. Руденко Ю.Н., Ушаков И.А. Надежность систем энергетики. 2-е изд., перераб. и доп. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. 328 с.
12. Igor A. Ushakov Probabilistic Reliability Models. 1st Edition. Wiley, 2012. 248 p. (Gas-pipeline with an underground storage, с.99)

Рисунок 2.3. – Схема однониточного нефтепровода с поэлементными резервуарными парками.

Время безотказной работы первого линейного узла (ЛУ)  $M\alpha_1=200$  часов ( $\lambda_1=0,005$ ), второго ЛУ  $M\alpha_2=181,82$  часа ( $\lambda_2=0,0055$ ),  $M\alpha_3=250$  часов ( $\lambda_3=0,004$ ),  $M\alpha_4=222,22$  часа ( $\lambda_4=0,0045$ ),  $M\alpha_5=250$  часов ( $\lambda_5=0,004$ ); время восстановления  $M\beta_1=20$  часов ( $\mu_1=0,05$ ),  $M\beta_2=18,18$  часов ( $\mu_2=0,055$ ),  $M\beta_3=25$  часов ( $\mu_1=0,04$ ),  $M\beta_4=22,2$  часа ( $\mu_4=0,045$ ),  $M\beta_5=25$  часов ( $\mu_1=0,04$ ); прибыль, получаемая в единицу времени исправного функционирования системы,  $c_1=150$  у.е., потери в единицу времени отказа  $c_2=250$  у.е.

Поэлементные резервы времени связаны условиями:  $h_1=i$ ,  $h_2=15-i$ ,  $h_3=i+5$ ,  $h_4=20-i$ ,  $h_5=i+3$ ,  $i=0...15$  ч.

Расчетные формулы для нахождения стационарных характеристик надежности и эффективности нефтепровода:

$$K_{\Gamma} = \frac{\prod_{i=1}^N (\lambda_i + \mu_i - \lambda_i e^{-\mu_i h_i})}{\prod_{i=1}^N (\lambda_i + \mu_i)},$$

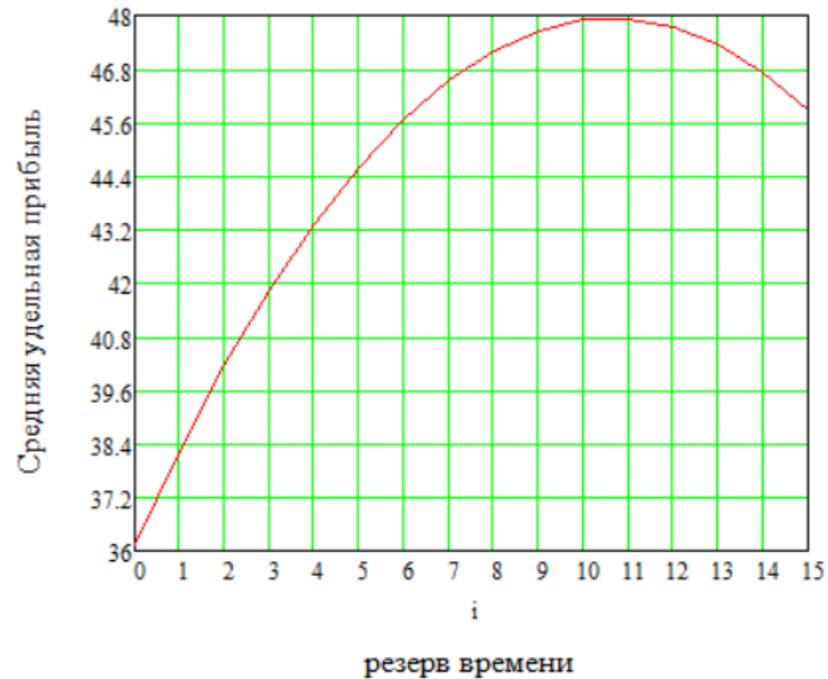
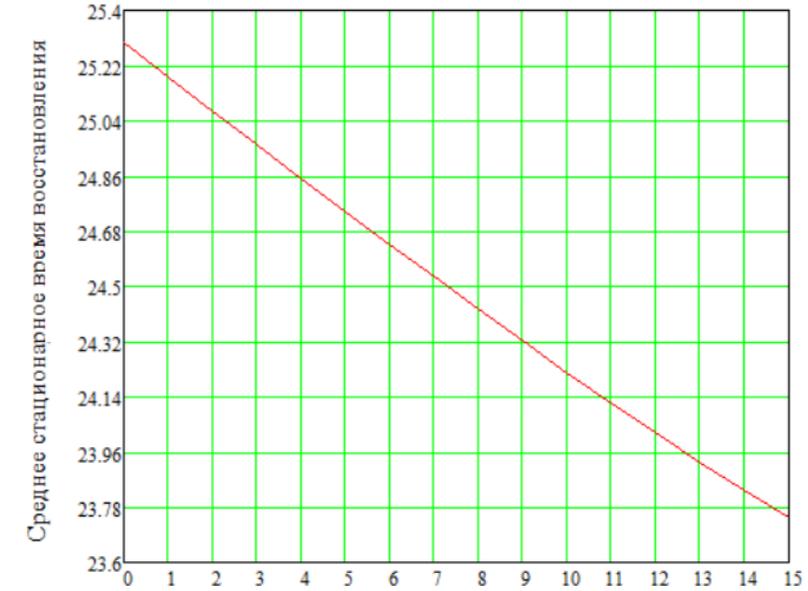
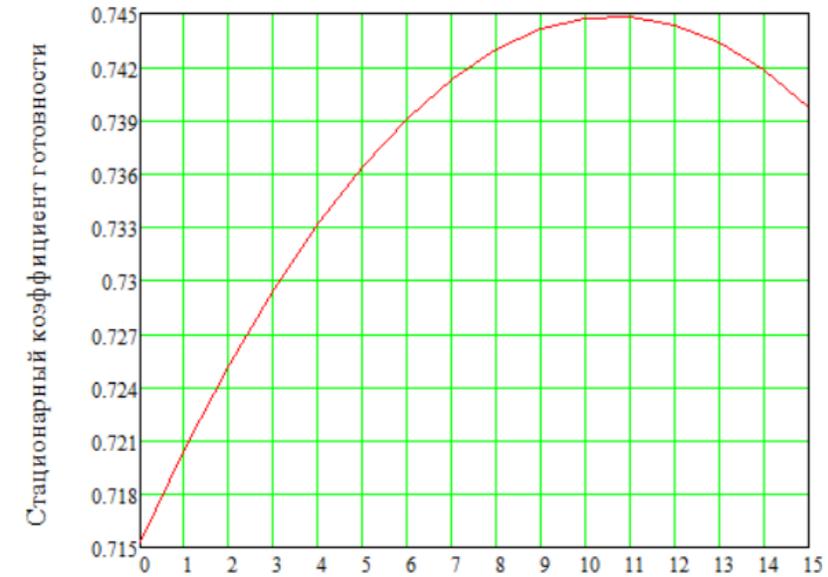
$$T_{+} = \frac{\prod_{i=1}^N \left( \frac{\lambda_i + \mu_i - \lambda_i e^{-\mu_i h_i}}{\lambda_i \mu_i} \right)}{\sum_{i=1}^N \left( e^{-\mu_i h_i} \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq i}}^N \left( \frac{\lambda_k + \mu_k - \lambda_k e^{-\mu_k h_k}}{\lambda_k \mu_k} \right) \right)},$$

$$T_{-} = \frac{\sum_{i=1}^N \left( \frac{e^{-\mu_i h_i}}{\mu_i} \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq i}}^N \left( \frac{\lambda_k + \mu_k - \lambda_k e^{-\mu_k h_k}}{\lambda_k \mu_k} \right) \right) + \prod_{i=1}^N \frac{e^{-\mu_i h_i}}{\mu_i}}{\sum_{i=1}^N \left( e^{-\mu_i h_i} \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq i}}^N \left( \frac{\lambda_k + \mu_k - \lambda_k e^{-\mu_k h_k}}{\lambda_k \mu_k} \right) \right)},$$

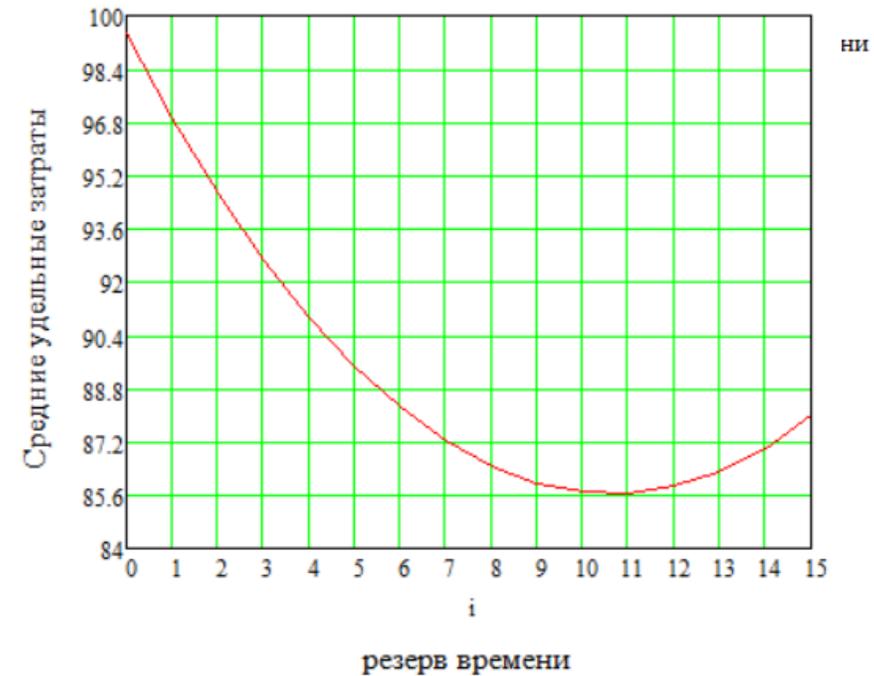
$$S = \frac{c_1 \prod_{i=1}^N \left( \frac{\lambda_i + \mu_i - \lambda_i e^{-\mu_i h_i}}{\lambda_i \mu_i} \right) - c_2 \left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{e^{-\mu_i h_i}}{\mu_i} \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq i}}^N \left( \frac{\lambda_k + \mu_k - \lambda_k e^{-\mu_k h_k}}{\lambda_k \mu_k} \right) \right) + \prod_{i=1}^N \frac{e^{-\mu_i h_i}}{\mu_i} \right]}{\prod_{i=1}^N \left( \frac{\lambda_i + \mu_i}{\lambda_i \mu_i} \right)},$$

$$C = \frac{c_2 \left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{e^{-\mu_i h_i}}{\mu_i} \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq i}}^N \left( \frac{\lambda_k + \mu_k - \lambda_k e^{-\mu_k h_k}}{\lambda_k \mu_k} \right) \right) + \prod_{i=1}^N \frac{e^{-\mu_i h_i}}{\mu_i} \right]}{\prod_{i=1}^N \left( \frac{\lambda_i + \mu_i - \lambda_i e^{-\mu_i h_i}}{\lambda_i \mu_i} \right)}.$$

$h_1, \text{ч.}$	$h_2, \text{ч.}$	$h_3, \text{ч.}$	$h_4, \text{ч.}$	$h_5, \text{ч.}$	$K_r$	$T_+, \text{ч.}$	$T_-, \text{ч.}$	$S, \text{y.e./ч.}$	$C, \text{y.e./ч.}$
0	15	5	20	3	0,715	63,557	25,295	36,124	99,498
1	14	6	19	4	0,721	64,938	25,182	38,229	96,946
2	13	7	18	5	0,725	66,201	25,070	40,129	94,675
3	12	8	17	6	0,730	67,332	24,960	41,823	92,674
4	11	9	16	7	0,733	68,320	24,850	43,311	90,935
5	10	10	15	8	0,736	69,151	24,742	44,594	89,450
6	9	11	14	9	0,739	69,817	24,635	45,670	88,215
7	8	12	13	10	0,741	70,307	24,529	46,540	87,223
8	7	13	12	11	0,743	70,614	24,425	47,201	86,473
9	6	14	11	12	0,744	70,733	24,321	47,653	85,962
<b>10</b>	<b>5</b>	<b>15</b>	<b>10</b>	<b>13</b>	<b>0,745</b>	<b>70,660</b>	<b>24,219</b>	<b>47,894</b>	<b>85,690</b>
<b>11</b>	<b>4</b>	<b>16</b>	<b>9</b>	<b>14</b>	<b>0,745</b>	<b>70,395</b>	<b>24,119</b>	<b>47,923</b>	<b>85,657</b>
12	3	17	8	15	0,744	69,939	24,021	47,738	85,865
13	2	18	7	16	0,743	69,295	23,926	47,337	86,319
14	1	19	6	17	0,742	68,470	23,834	46,717	87,022
15	0	20	5	18	0,740	67,471	23,745	45,875	87,981



i  
резерв времени



Введем следующие классы состояний:

$$E_{11} = \{1; 11x; 211x\}, \quad E_{00} = \{100x; 200x\}$$

$$E_{\bar{1}1} = \{1\bar{1}1x; 2\bar{1}1x\}, \quad E_{1\bar{1}} = \{11\bar{1}x; 21\bar{1}x\}, \quad E_{10} = \{110x; 210x\}, \quad E_{\bar{1}\bar{1}} = \{1\bar{1}\bar{1}x; 2\bar{1}\bar{1}x\},$$

$$E_{01} = \{101x; 201x\}, \quad E_{0\bar{1}} = \{10\bar{1}x; 20\bar{1}x\}, \quad E_{\bar{1}0} = \{1\bar{1}0x; 2\bar{1}0x\}.$$

Фазовое пространство состояний укрупненной модели

$$\hat{E} = \{00, 11, 1\bar{1}, \bar{1}1, \bar{1}\bar{1}, 10, 01, \bar{1}0, 0\bar{1}\}.$$

Множество сигналов  $J = \{0, 1, 2\}$ .

**Функция  $R(s|x)$  связи состояний ВЦМ с сигналами**

$s \backslash x$	00	11	$\bar{1}\bar{1}$	$\bar{1}1$	$1\bar{1}$	10	01	$0\bar{1}$	$\bar{1}0$
s=0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
s=1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
s=2	0	1	1	1	1	0	0	0	0

Параллельное соединение. Времена безотказной работы  $M\alpha_1 = 8,33$  ч.,  
 $M\alpha_2 = 6,25$  ч., времена восстановления  $M\beta_1 = 0,71$  ч.,  $M\beta_2 = 0,83$  ч. Каждый элемент имеет  
неслучайный РВ,  $h_1 = 0,5$  ч.,  $h_2 = 0,4$  ч.

Пусть задан вектор сигналов  $(2, 2, 1, 1, 0, 1, 1)$  ( $n=7$ ).

**1. Определить в каком классе состояний находилась система в момент испускания 7-го сигнала:**

в состоянии  $0\bar{1}$  с вероятностью **0,3991** и в состоянии  $\bar{1}0$  с вероятностью **0,6009**.

**2. Определить вероятности, с которыми система осуществит переход в соответствующий класс на следующем шаге:**

в  $00$  с вероятностью **0,3924**; в  $\bar{1}1$  – **0,2928**; в  $\bar{1}\bar{1}$  – **0,2123**; в  $10$  – **0,0846**;  
в  $01$  – **0,0179**; в остальные – **0**.

**3. Определить вероятности появления сигнала  $j$  на следующем шаге для заданной цепочки сигналов :**

вероятность появления сигнала 2 на 8-м шаге равна **0,5050**; сигнала 1 – **0,1025**; сигнала 0 – **0,3925**.

## 4. Вероятность испускания заданного вектора сигналов.

$h_1$	$h_2$	$P(\bar{S}^n = \bar{s}_n)$
0	0	0,0092
0	0,7	0,0022
0,1	0,4	0,0032
0,1	0,6	0,0020
0,2	0,2	0,0039
0,3	0,2	0,0030
0,4	0,4	0,0012
0,5	0,2	0,0017
0,5	0,4	0,0009
0,6	0,6	0,0003
0,7	0	0,0017
0,7	0,8	0,0001

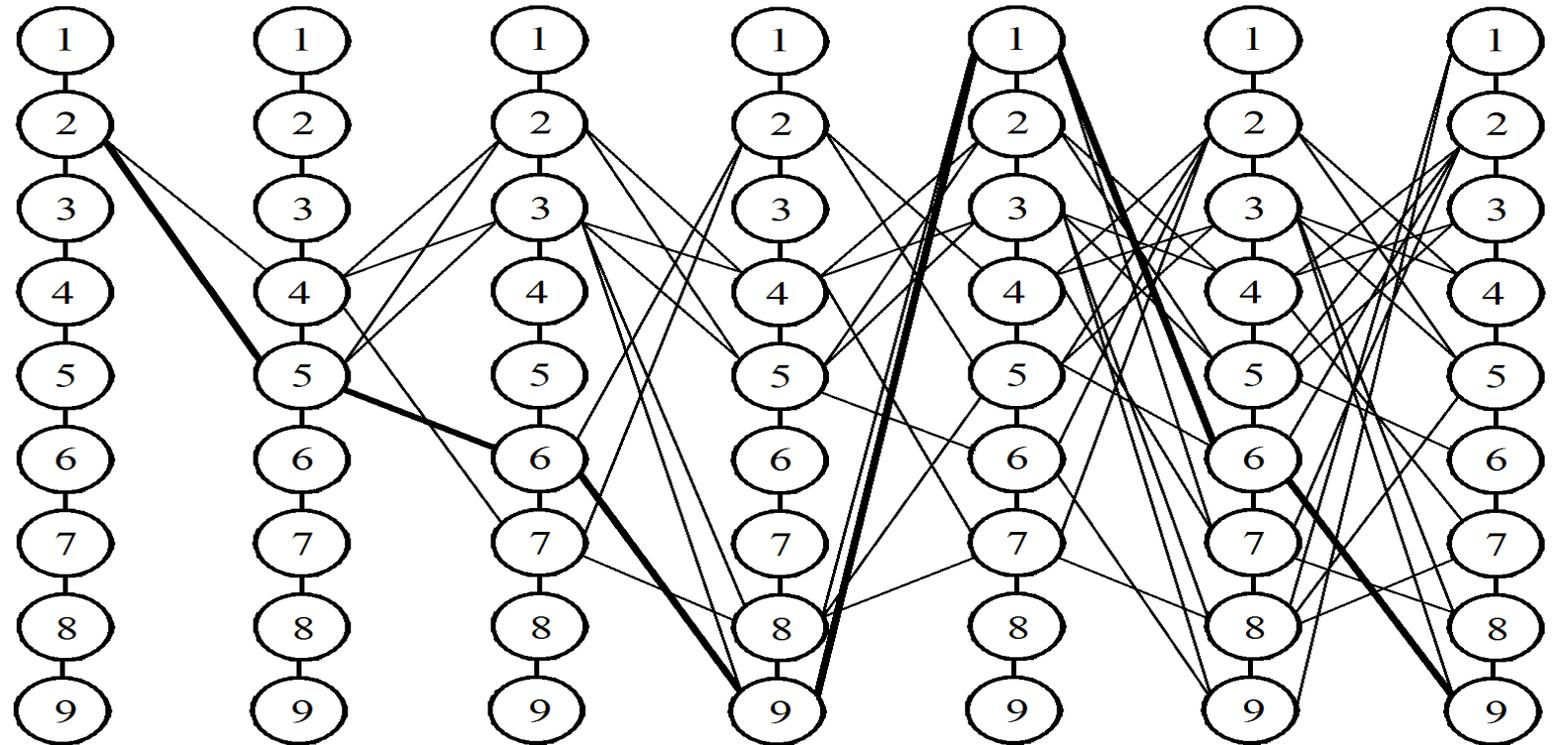


Рисунок 2.4 – Решетчатая диаграмма

( $00 \leftrightarrow 1$ ,  $11 \leftrightarrow 2$ ,  $\bar{1}\bar{1} \leftrightarrow 3$ ,  $\bar{1}1 \leftrightarrow 4$ ,  $1\bar{1} \leftrightarrow 5$ ,  $10 \leftrightarrow 6$ ,  $01 \leftrightarrow 7$ ,  $0\bar{1} \leftrightarrow 8$ ,  $\bar{1}0 \leftrightarrow 9$ )

## 5. Наиболее вероятные состояния скрытой модели на переходах

Номер перехода	1	2	3	4	5	6	7
Наиболее вероятное состояние	11	$1\bar{1}$	10	$\bar{1}0$	00	10	$\bar{1}0$
Вероятность состояния	1	0,6139	0,6139	0,6139	1	0,6009	0,6009

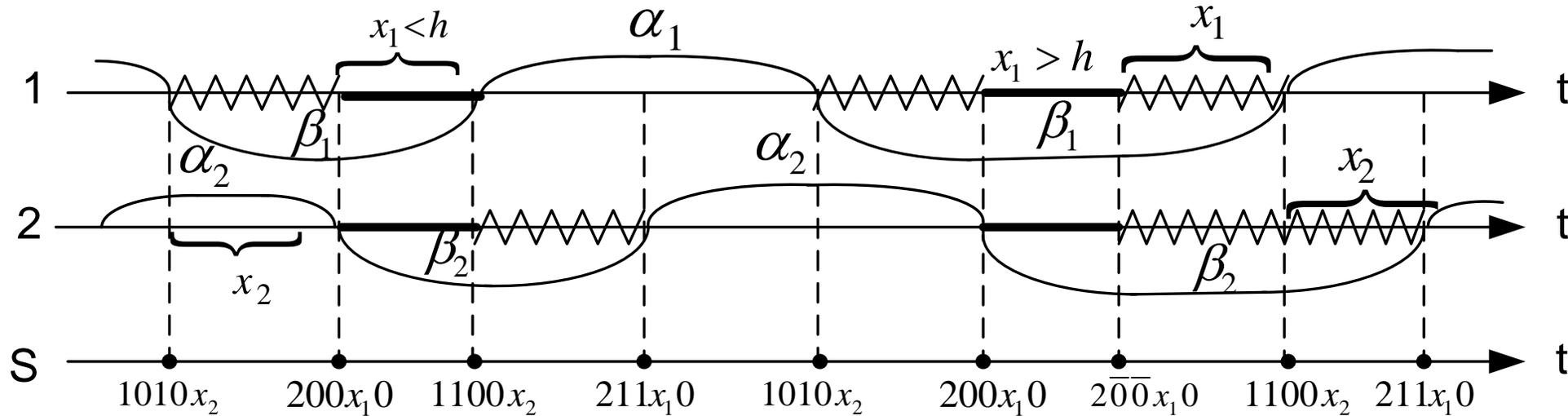


Рисунок 2.5 – Временная диаграмма функционирования системы

Фазовое пространство состояний  $E$  исходной модели расщепим на  $N=5$  классов:

$$E_{11} = \{1110x_2, 211x_10\}, E_{10} = \{1100x_2, 210x_10\}, E_{01} = \{1010x_2, 201x_10\},$$

$$E_{00} = \{1000x_2, 200x_10\}, E_{\bar{0}\bar{0}} = \{1\bar{0}\bar{0}0x_2, 2\bar{0}\bar{0}x_10\},$$

**Множество сигналов  $J = \{0, 1, 2\}$ .**

Параллельное соединение. Времена безотказной работы  $M\alpha_1 = 28,57$  ч.,  $M\alpha_2 = 25$  ч., времена восстановления  $M\beta_1 = 2$  ч.,  $M\beta_2 = 1,6$  ч. Групповой мгновенно пополняемый резерв времени  $h = 1,5$  ч.

Пусть задан вектор сигналов  $(2, 1, 0, 1, 2, 1, 0)$  ( $n=7$ ).

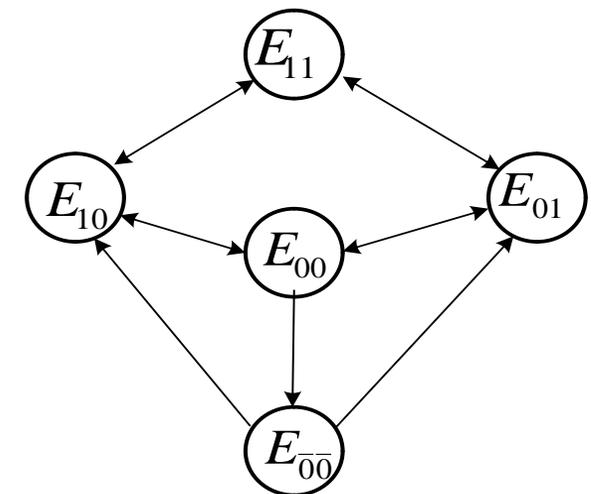


Рисунок 2.6 – Граф переходов укрупненной системы

## Задачи по оценке характеристик СММ:

- на 7-ом шаге укрупнённая модель с вероятностью **1** находилась в состоянии 00. Для остальных состояний эта вероятность равна 0.
- Вероятности перехода СММ на 8-м шаге:  
в 10 – **0,3369**, 01 – **0,5100**,  $\bar{0}\bar{0}$  – **0,1531**, в остальные – 0.
- Вероятности появления сигналов на 8-м шаге:  
сигнал 1 с вероятностью **0,8469**, 0 – **0,1531**, 2 – 0.

## Связь состояний с сигналами

	<b>S</b>			
<b>x</b>		<b>s=0</b>	<b>s=1</b>	<b>s=2</b>
<b>11</b>		0	0	1
<b>10</b>		0	1	0
<b>01</b>		0	1	0
<b>00</b>		1	0	0
	$\bar{0}\bar{0}$	1	0	0

Наиболее вероятные состояния скрытой модели на переходах

<b>Номер перехода</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
<b>Наиболее вероятное состояние</b>	11	01	00	01	11	01	00
<b>Вероятность состояния</b>	1,000	0,550	1,000	0,597	1,000	0,550	1,000

Применяя алгоритм Баума-Велша, получаем уточненную матрицу переходных вероятностей для рассматриваемой системы (задача обучения модели).

	<b>h=1,5 часа</b>	<b>h=1,1 часа</b>	<b>h=0,7 часа</b>	<b>h=0,3 часа</b>
<b><math>P(\bar{S}^n = \bar{s}_n)</math></b>	0,0031	0,0025	0,0016	0,0006

Вероятность появления  $\bar{s}_7$  при различных значениях РВ

Применяя алгоритм Витерби к уточненной модели, получаем наиболее вероятная цепочка состояний для полученного вектора сигналов:

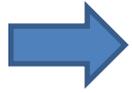
**11, 10, 00, 01, 11, 10, 00.**

$$P_i^j = \begin{pmatrix} 0 & 0,5333 & 0,4667 & 0 & 0 \\ 0,9470 & 0 & 0 & 0,0530 & 0 \\ 0,9260 & 0 & 0 & 0,0740 & 0 \\ 0 & 0,3369 & 0,5100 & 0 & 0,1531 \\ 0 & 0,4221 & 0,5779 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{P}_i^j = \begin{pmatrix} 0 & 0,4500 & 0,5500 & 0 & 0 \\ 0,3094 & 0 & 0 & 0,6906 & 0 \\ 0,3517 & 0 & 0 & 0,6483 & 0 \\ 0 & 0,4032 & 0,5968 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

а) исходные переходные вероятности

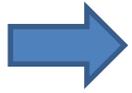
б) уточненные переходные вероятности

Матрицы переходных вероятностей



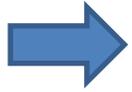
**разработаны полумарковские модели двух- и многокомпонентных систем с поэлементным резервом времени и получены расчетные формулы их характеристик надежности и эффективности**

---



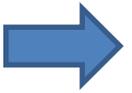
**Построены скрытые марковские модели систем с резервом времени, допускающих построение полумарковской модели**

---



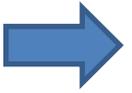
**Разработанные полумарковские и скрытые марковские модели позволяют анализировать влияние величины резерва времени на характеристики надежности и эффективности систем различного назначения**

---



**Полученные формулы позволяют рассчитывать стационарные характеристики надежности и эффективности систем различного назначения с учетом резерва времени, решать оптимизационные задачи распределения резерва времени между элементами системы**

---

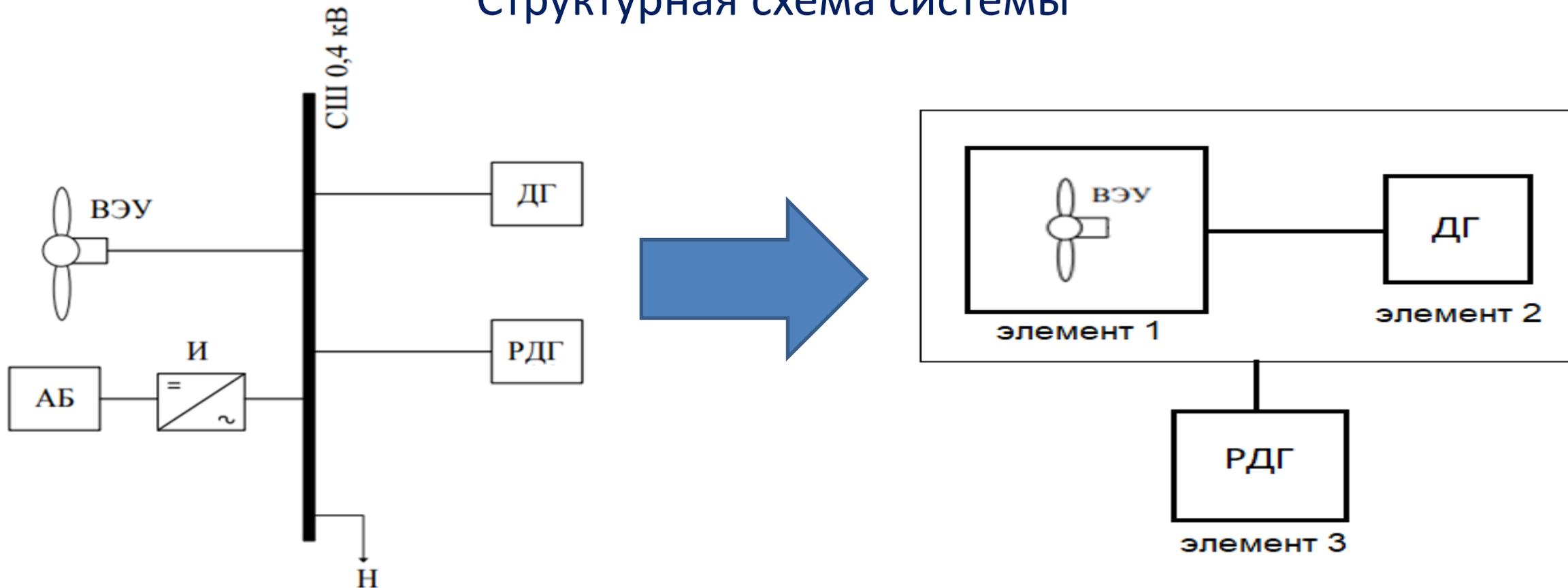


**Построенные скрытые марковские модели систем позволяют прогнозировать состояния системы на основе полученного вектора сигналов, находить наиболее вероятные последовательности состояний по сигналам.**

---

# 3. СКРЫТАЯ МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ВЕТРОДИЗЕЛЬНОГО КОМПЛЕКСА

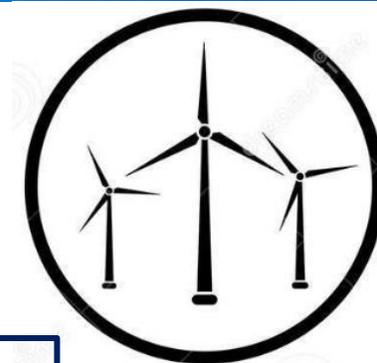
## Структурная схема системы



13. Кривенко Т.В. Развитие моделей и методов оценки надежности автономных систем генерации, использующих ВИЭ, 2018 г. (с. 45)

ВЭУ – ветроэнергетическая установка; ДГ – рабочий дизельный генератор; ДРГ – резервный дизельный генератор; И – инвертор; АБ – аккумуляторная батарея; Н – нагрузка

Под отказом элемента 1 следует понимать любое событие, приводящее к нарушению нормального функционирования (например, отсутствие ветра, поломка одной из составляющих и т.п.).



Система функционирует следующим образом:

- 1. если элемент 1 (2) выходит из строя, то элемент 2 (1) отключается, элемент 3 включается, и система функционирует за счет резерва времени (элемент 3).
- 2. Как только элемент 1 (2) восстанавливается, то элемент 3 отключается (при этом считаем, что к следующему моменту времени его характеристики полностью восстанавливаются), а элемент 2 (1) приступает к работе с прежним уровнем наработки.



**Отказ системы** наступает в том случае, когда элемент 1 (2) находится на восстановлении, элемент 2 (1) отключен, и заканчивается резерв времени (отказ элемента 3).

Резерв времени **заканчивается** в случае, если либо кончается топливо резервного генератора (время работы за счет запаса топлива), либо он выходит из строя.



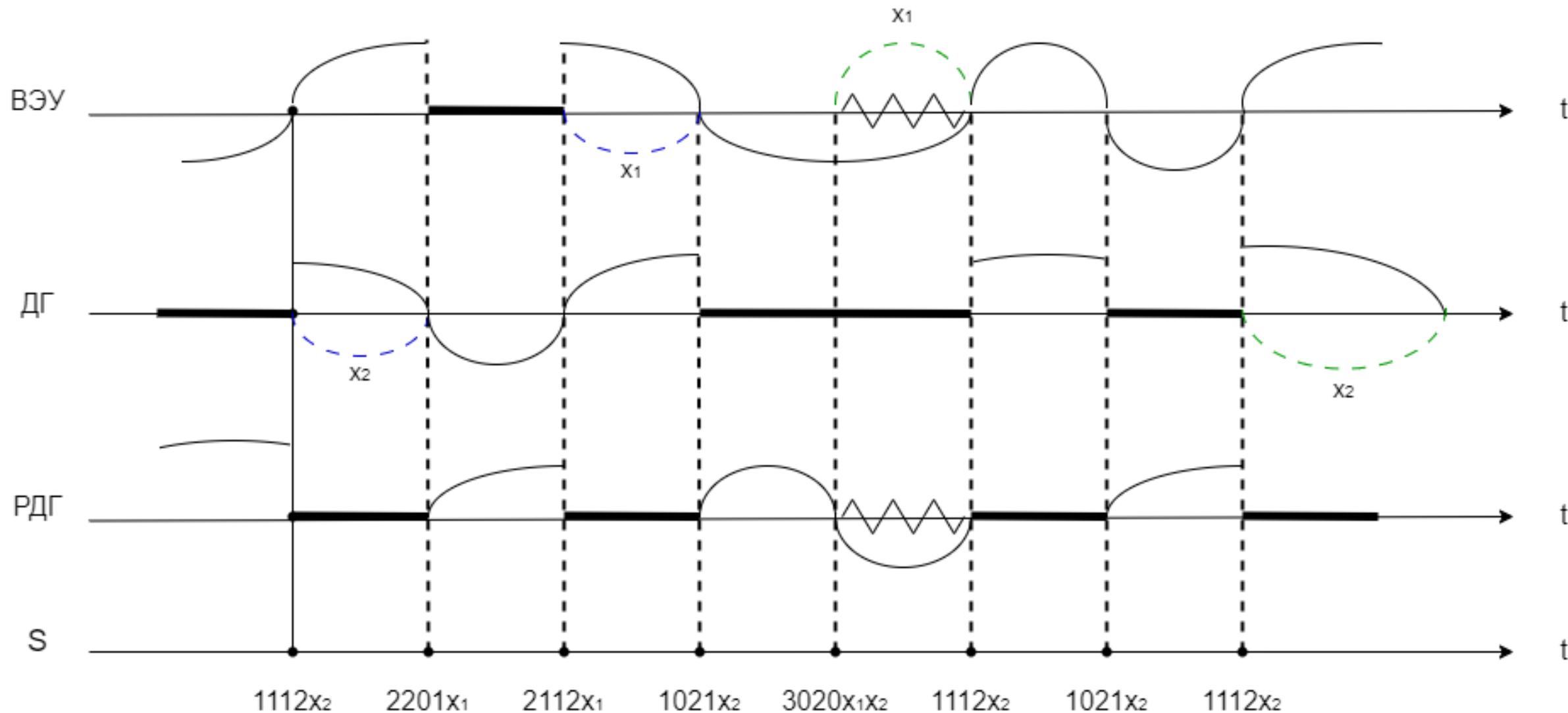


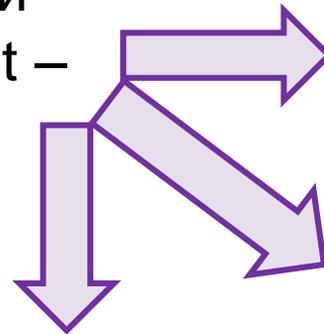
Рисунок 3.1. – Диаграмма функционирования ВДК

Разобьем пространство состояний  $E$  на два непересекающихся подмножества:  
работоспособных ( $E_+$ ) и отказовых состояний ( $E_-$ ).

$$E_+ = \{1112x_2, 2112x_1, 1021x_2, 2201x_1\}, E_- = \{3020x_1x_2, 3200x_1x_2\}.$$

первая цифра кода означает номер элемента, в котором произошло изменение состояний;  
остальные цифры – что происходит с каждым элементом (1 – работа, 2 – отключен, 0 –  
восстановление). Непрерывные компоненты показывают время, оставшееся до следующей  
смены состояний.

Стационарные характеристики  
надежности имеют вид ( $h=\text{const}$  –  
величина резерва времен):



среднее стационарное время безотказной работы

$$T_+ = \frac{M\alpha_2 \int_0^h \overline{G}_1(t)dt + M\alpha_1 \int_0^h \overline{G}_2(t)dt + M\alpha_1 M\alpha_2}{M\alpha_2 \overline{G}_1(h) + M\alpha_1 \overline{G}_2(h)},$$

среднее стационарное время восстановления

$$T_- = \frac{M\alpha_2 \int_h^\infty \overline{G}_1(t)dt + M\alpha_1 \int_h^\infty \overline{G}_2(t)dt}{M\alpha_2 \overline{G}_1(h) + M\alpha_1 \overline{G}_2(h)},$$

стационарный коэффициент готовности

$$K_r = \frac{M\alpha_2 \int_0^h \overline{G}_1(t)dt + M\alpha_1 \int_0^h \overline{G}_2(t)dt + M\alpha_1 M\alpha_2}{M\alpha_1 M\alpha_2 + M\alpha_2 M\beta_1 + M\alpha_1 M\beta_2}.$$

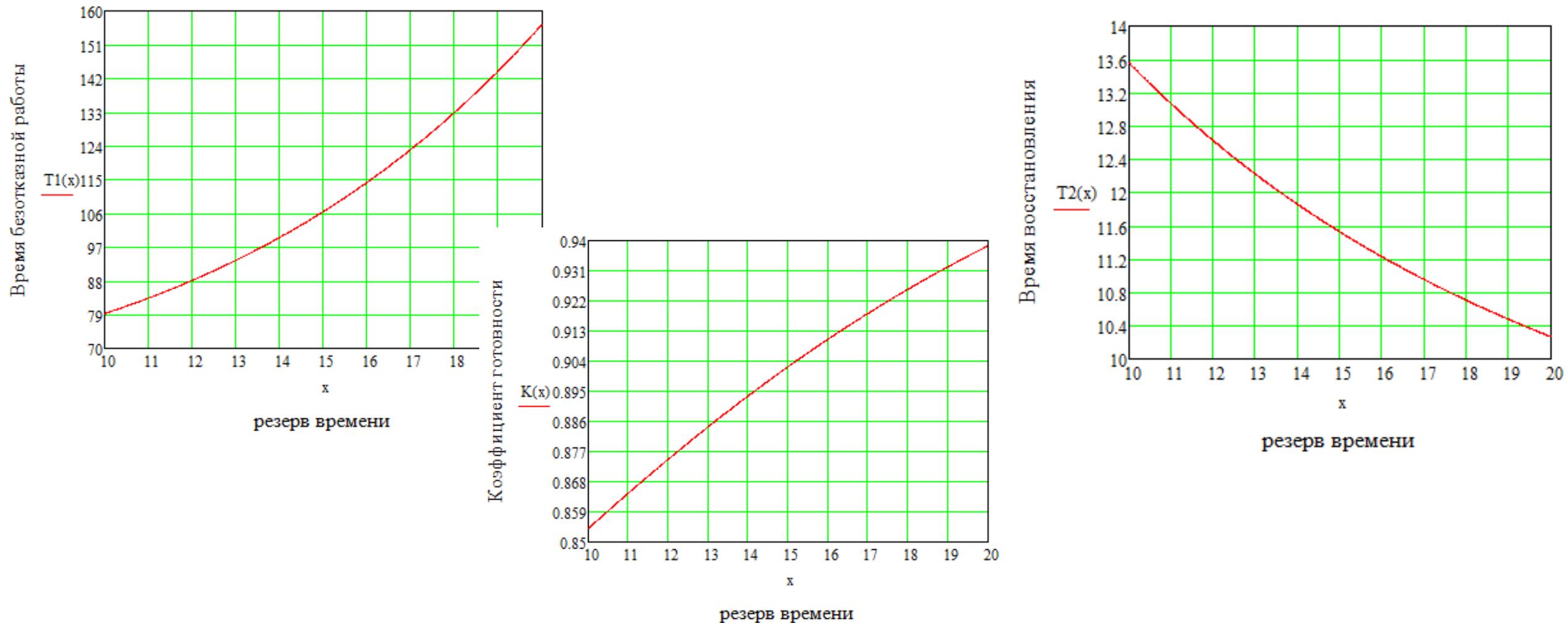
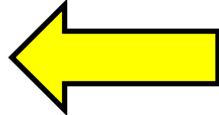


Рис. 3.2. – Графики стационарных характеристик надежности при различных значениях резерва времени  $h$  ( $h=\text{const}$ ): а – среднее время безотказной работы, б – среднее время восстановления, в – стационарный коэффициент готовности

## Связь состояний модели с сигналами

Сигнал, s	s=0	s=1	s=2
Состояние, x			
1112	0	1	0
2112	0	1	0
1021	0,01	0	0,99
2201	0,01	0	0,99
3020	0,99	0	0,01
3200	0,99	0	0,01

## Множество сигналов



$$J = \{0, 1, 2\}$$



- 0 – отказ системы;
- 1 – элемента 1 и 2 системы функционируют;
- 2 – система работоспособна за счет резервного дизельного генератора.

$$\hat{P}_i^j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{M\alpha_2 - M(\alpha_1 \wedge \alpha_2)}{M\alpha_2} & \frac{M(\alpha_1 \wedge \alpha_2)}{M\alpha_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M(\alpha_1 \wedge \alpha_2)}{M\alpha_1} & \frac{M\alpha_1 - M(\alpha_1 \wedge \alpha_2)}{M\alpha_1} & 0 & 0 \\ P(\tau > \beta_1) & 0 & 0 & 0 & P(\tau < \beta_1) & 0 \\ 0 & P(\tau > \beta_2) & 0 & 0 & 0 & P(\tau < \beta_2) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Матрица переходных вероятностей** состоит из переходных вероятностей  $\hat{P}_i^j$  укрупненной полумарковской модели

Множество состояний системы имеет вид:  
 $\hat{E} = \{1112, 2112, 1021, 2201, 3020, 3200\}$ .

Предположим, что в результате функционирования системы  $S$  получен следующий вектор сигналов:

Предполагается, что в начальный момент времени система находится в состояниях 1112 и 2112 с вероятностями 0,5.

$(1,2,1,2,1,2,1,2,0,1,2,1,2,1,2,0,1,2,1,2,0,1,2,1,2,1,2,1,2,1), n=30$ .

В качестве иллюстративного примера, рассмотрим систему  $S$ , для которой перед началом её функционирования принято, что СВ  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  имеют распределение Эрланга IV порядка и  $M\alpha_1 = 150$  ч.,  $M\alpha_2 = 100$  ч.,  $M\beta_1 = 24$  ч.,  $M\beta_2 = 20$  ч.,  $M\tau = 15$  ч.

## Вероятность появления полученного вектора сигналов

Вероятность появления  $\bar{s}_{30}$

0,00000243

## Анализ характеристик и прогнозирование состояний укрупненной полумарковской модели на основе вектора сигналов

### 1. Вероятности состояний в момент испускания 30-го сигнала

Т.к. 30-й сигнал равен 1 (элементы 1 и 2 системы функционируют), то стоит задача определения вероятности нахождения укрупненной системы в состояниях, приводящих к испусканию указанного сигнала.

### 2. Вероятности перехода скрытой модели на 31-ом шаге

### 3. Вероятности появления сигналов на 31-ом шаге

1	2	3
<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ в состоянии 1112 – вероятностью <b>0,3553</b></li> <li>➤ в состоянии 2112 – с вероятностью <b>0,6447</b></li> <li>➤ в остальных – <b>0</b>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ в состояние 1021 с вероятностью <b>0,419</b></li> <li>➤ в состояние 2201 – <b>0,581</b></li> <li>➤ во все остальные – <b>0</b>.</li> </ul>	<p>вероятность появления на 31-м шаге:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ сигнала 2 равна <b>0,99</b></li> <li>➤ сигнала 0 – <b>0,01</b></li> <li>➤ сигнала 1 – <b>0</b>.</li> </ul>

Используя **алгоритм Баума-Велша** можно подобрать параметры скрытой модели (провести обучение), чтоб они наиболее точно согласовывались с заданным вектором сигналов.

Строки и столбцы соответствуют следующим укрупненным классам состояний:

**1112 ↔ 1, 2112 ↔ 2, 1021 ↔ 3, 2201 ↔ 4, 3020 ↔ 5, 3200 ↔ 6**

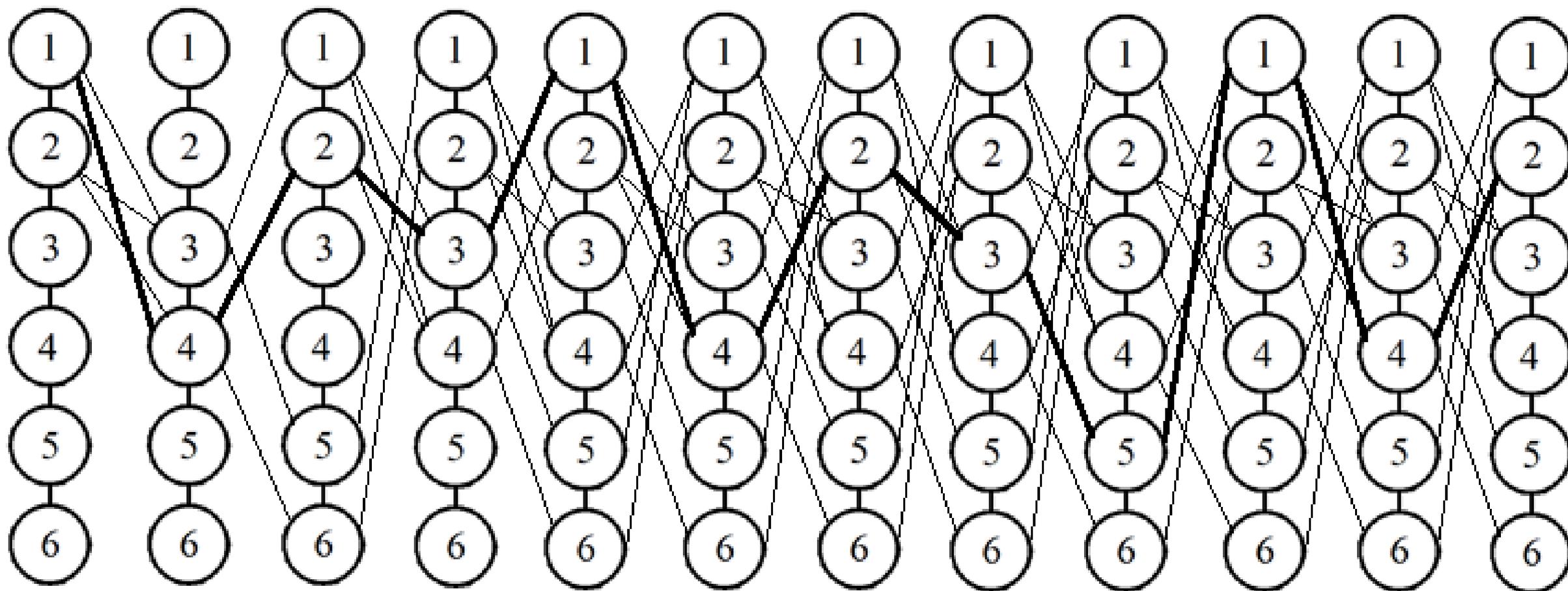
Исходная матрица переходных вероятностей  $P_i^j$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,1454 & 0,8546 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5697 & 0,4303 & 0 & 0 \\ 0,2606 & 0 & 0 & 0 & 0,7394 & 0 \\ 0 & 0,3469 & 0 & 0 & 0 & 0,6531 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

«Уточненная» (после обучения) матрица вероятностей  $P_i^j$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,1283 & 0,8717 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5369 & 0,4631 & 0 & 0 \\ 0,7075 & 0 & 0 & 0 & 0,2925 & 0 \\ 0 & 0,8066 & 0 & 0 & 0 & 0,1934 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1112 ↔ 1, 2112 ↔ 2, 1021 ↔ 3, 2201 ↔ 4, 3020 ↔ 5, 3200 ↔ 6



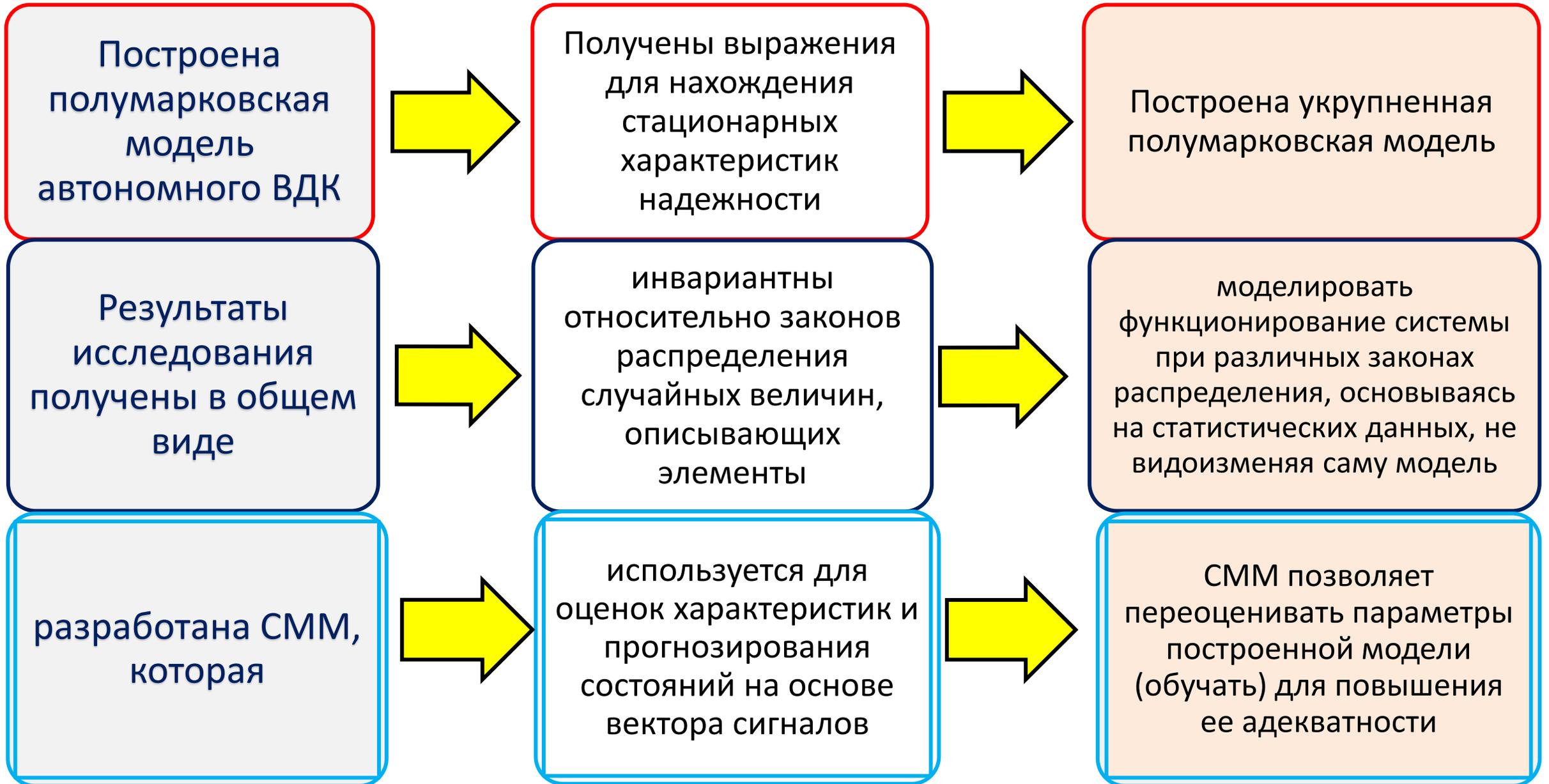
Решетчатая диаграмма функционирования системы после обучения  
(первые 12 состояний)

## Наиболее вероятные состояния скрытой модели на переходах (без обучения)

Номер перехода	1	7	11	17	21	26	29
Наиболее вероятное состояние	1112	2112	2201	2112	3200	2112	2201
Вероятность состояния	0,5233	0,6737	0,6520	0,5190	0,5136	0,6132	0,6447

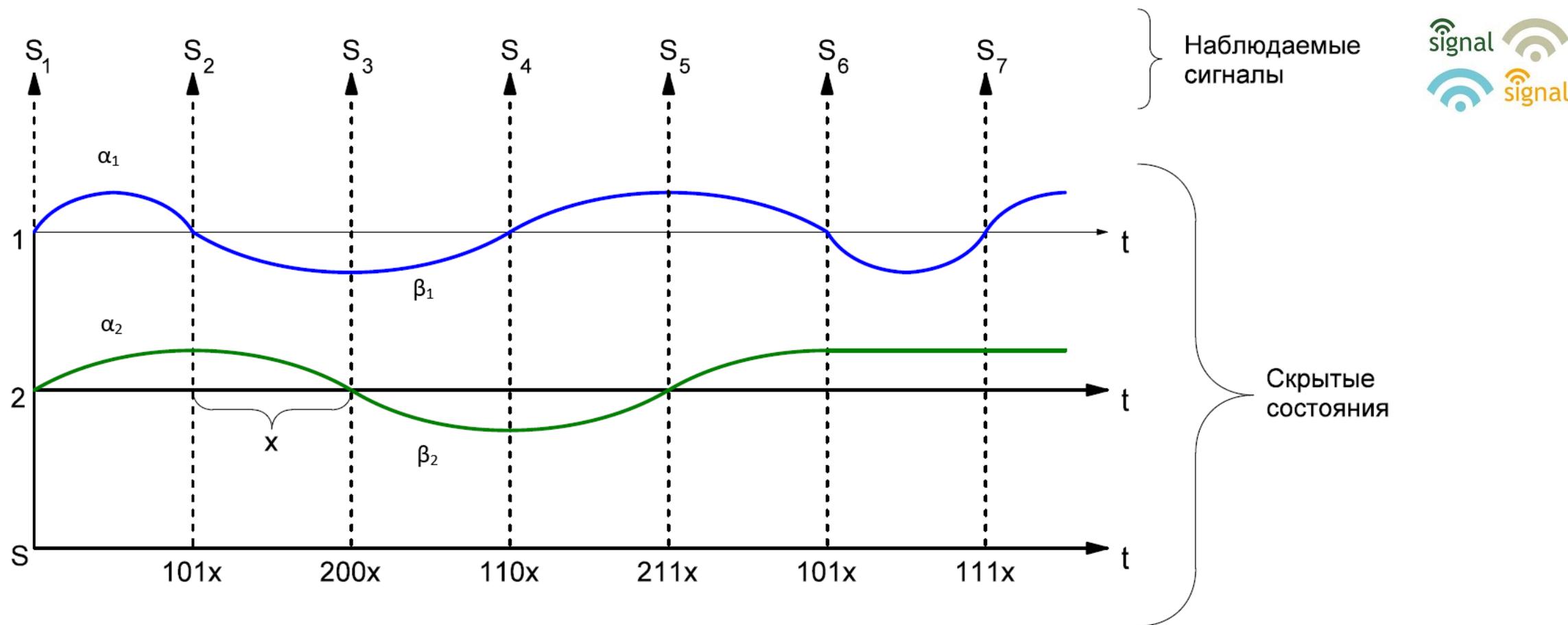
Применяя алгоритм Витерби к переоцененной модели (после обучения), определяем наиболее вероятную цепочку состояний для полученного вектора сигналов:

1112, 2201, 2112, 1021, 1112, 2201, 2112, 1021, 3020, 1112, 2201, 2112, 1021, 2112, 2201, 3200, 2112, 2201, 2112, 1021, **3020**, 1112, 2201, 2112, 1021, 2112, 2201, 2112, **1021**, 2112.



# **4. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ СИГНАЛОВ СКРЫТОЙ МАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ НА ОЦЕНКУ ХАРАКТЕРИСТИК ДУБЛИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ**





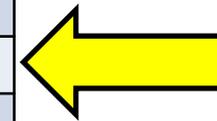
В качестве примера, рассмотрим систему  $S$ , для которой перед началом её функционирования принято, что СВ  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  имеют распределение Эрланга IV порядка и  $M\alpha_1 = 15\text{ч}$ ,  $M\alpha_2 = 10\text{ч}$ ,  $M\beta_1 = 3\text{ч}$ ,  $M\beta_2 = 4\text{ч}$ . Предполагается, что в начальный момент времени система находится в состоянии  $b$ .

## Рассмотрим 4 вида множества сигналов:

$$J = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$$

1

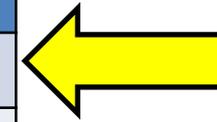
	b	111	211	101	201	110	210	100	200
s=0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
s=1	0	0	0	1	1	1	1	0	0
s=2	1	1	1	0	0	0	0	0	0



наблюдается только число  $J = \{0, 1, 2\}$   
работоспособных  
элементов системы

2

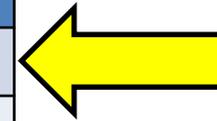
	b	111	211	101	201	110	210	100	200
s=1	$\rho_1$	1	0	1	0	1	0	1	0
s=2	$\rho_2$	0	1	0	1	0	1	0	1



наблюдается только номер  
элемента, в котором  
произошла смена состояния  $J = \{1, 2\}$

3

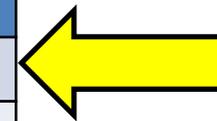
	b	111	211	101	201	110	210	100	200
s=P	1	1	1	1	1	1	1	0	0
s=H	0	0	0	0	0	0	0	1	1



наблюдается только находится  
ли она в работоспособном  
состоянии или в отказе (при  $J = \{P, H\}$   
параллельном соединении  
элементов)

4

	b	111	211	101	201	110	210	100	200
s= P <sub>1</sub>	1	1	1	0	0	1	1	0	0
s= H <sub>1</sub>	0	0	0	1	1	0	0	1	1



наблюдается только, работоспособен  
или неработоспособен первый  
элемент системы  $J = \{P_1, H_1\}$

Функции связи между состояниями ВЦМ и  
множествами сигналов

## Анализ характеристик и прогнозирование состояний укрупненной полумарковской модели на основе вектора сигналов

Предположим, что функционирование рассматриваемой системы описывается следующей последовательностью состояний ( $n=30$ ):

$b, 101, 111, 210, 211, 101, 111, 210, 211, 101, 111, 101, 111, 210, 211, 101, \mathbf{200}, 201, 111, 101, 111, 210, 211, 101, 111, 210, 211, 101, 111, 210.$

Случай I		Случай II		Случай III		Случай IV	
Состояние	Вероятность	Состояние	Вероятность	Состояние	Вероятность	Состояние	Вероятность
101	0,3824	<b>201</b>	<b>1</b>	101	0,3824	<b>201</b>	<b>1</b>
<b>210</b>	<b>0,6176</b>			<b>210</b>	<b>0,6176</b>		

Вероятности состояний в момент испускания 30-го сигнала

Случай I		Случай II		Случай III		Случай IV	
Состояние	Вероятность	Состояние	Вероятность	Состояние	Вероятность	Состояние	Вероятность
111	0,2705			111	0,2705		
211	<b>0,3519</b>	211	<b>0,5697</b>	211	<b>0,3519</b>	211	<b>0,5697</b>
100	0,2657	100	0,4303	100	0,2657	100	0,4303
200	0,1119			200	0,1119		

Вероятности перехода скрытой модели на 31-ом шаге

Случай I		Случай II		Случай III		Случай IV	
$s=0$	0,3777	$s=1$	0,5697	$s=P$	0,6223	$s=P_1$	0,5697
$s=1$	0	$s=2$	0,4303	$s=H$	0,3777	$s=H_1$	0,4303
$s=2$	0,6223						

Вероятности появления сигналов на 31-ом шаге

	Случай I	Случай II	Случай III	Случай IV
Вероятность появления $\bar{s}_{30}$	0,00076	$2,05 \cdot 10^{-9}$	0,00076	$7,07 \cdot 10^{-9}$

## Вероятности появления полученного вектора сигналов

На основании полученного вектора сигналов  $\bar{s}_{30}$  необходимо найти наиболее вероятные состояния скрытой модели на переходах. Для решения этой задачи используется формула

$$P(X_k = i | \bar{S}^k = \bar{s}_k) = \frac{F_k(i)B_k(i)}{\sum_j F_k(j)B_k(j)}$$

Необходимо найти  $i$ , которое максимизирует выражение  $F_k(i)B_k(i)$ .

№ перехода	Случай I		Случай II		Случай III		Случай IV	
	Наиболее вероятное состояние	Вероятность состояния						
<b>1</b>	<b>b</b>	<b>1</b>	<b>b</b>	<b>1</b>	<b>b</b>	<b>1</b>	<b>b</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>210</b>	<b>0,6782</b>	<b>101</b>	<b>1</b>	<b>210</b>	<b>0,6782</b>	<b>101</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>211</b>	<b>0,6782</b>	<b>111</b>	<b>1</b>	<b>211</b>	<b>0,6782</b>	<b>111</b>	<b>1</b>
<b>4</b>	<b>210</b>	<b>0,5356</b>	<b>210</b>	<b>1</b>	<b>210</b>	<b>0,5356</b>	<b>210</b>	<b>1</b>
<b>5</b>	<b>211</b>	<b>0,5356</b>	<b>211</b>	<b>1</b>	<b>211</b>	<b>0,5356</b>	<b>211</b>	<b>1</b>
<b>6</b>	<b>210</b>	<b>0,5986</b>	<b>101</b>	<b>1</b>	<b>210</b>	<b>0,5986</b>	<b>101</b>	<b>1</b>
<b>7</b>	<b>211</b>	<b>0,5986</b>	<b>111</b>	<b>1</b>	<b>211</b>	<b>0,5986</b>	<b>111</b>	<b>1</b>
<b>8</b>	<b>210</b>	<b>0,5706</b>	<b>210</b>	<b>1</b>	<b>210</b>	<b>0,5706</b>	<b>210</b>	<b>1</b>

Строки и столбцы соответствуют следующим укрупненным классам состояний:

$1 \leftrightarrow b, 2 \leftrightarrow 111, 3 \leftrightarrow 211, 4 \leftrightarrow 101, 5 \leftrightarrow 201,$   
 $6 \leftrightarrow 110, 7 \leftrightarrow 210, 8 \leftrightarrow 100, 9 \leftrightarrow 200.$

Исходная матрица переходных вероятностей  $P_i^j$  имеет вид

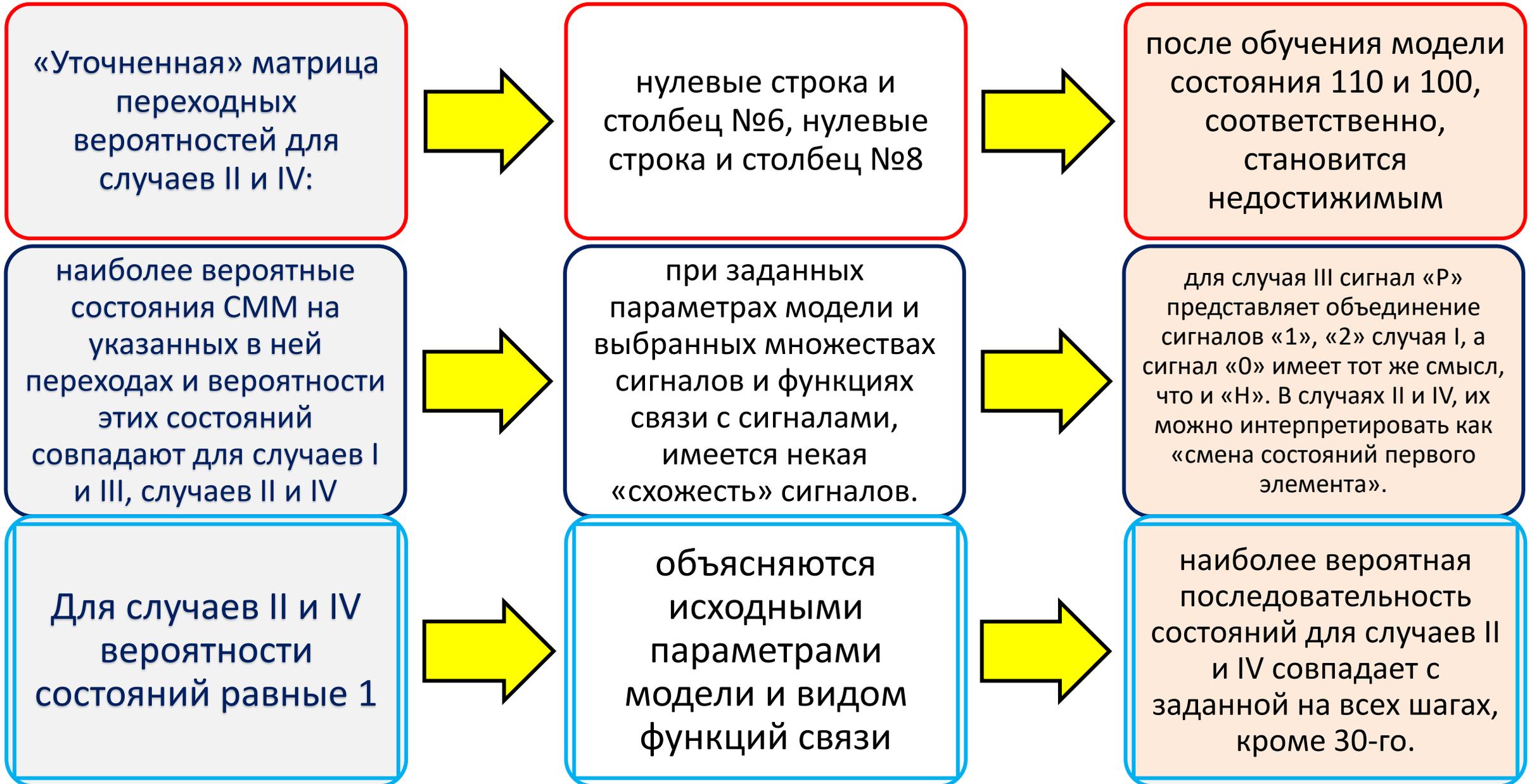
$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,28979} & 0 & 0 & \mathbf{0,71021} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,14541} & 0 & 0 & \mathbf{0,85459} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,56973} & 0 & 0 & \mathbf{0,43027} & 0 & 0 \\
 0 & \mathbf{0,70727} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,29273} \\
 0 & \mathbf{0,17812} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,82188} \\
 0 & 0 & \mathbf{0,98243} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,01757} & 0 \\
 0 & 0 & \mathbf{0,56973} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,43027} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,61641} & \mathbf{0,38359} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,17812} & \mathbf{0,82188} & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

Отметим, что «уточненные» матрицы переходных вероятностей  $P_i^j$  для случая I и случая III совпадают и имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,32179} & 0 & 0 & \mathbf{0,67821} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,16409} & 0 & 0 & \mathbf{0,83591} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,60484} & 0 & 0 & \mathbf{0,39516} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0,92257} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,07743} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0,92345} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,07655} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,21422} & \mathbf{0,78578} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,03546} & \mathbf{0,96454} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

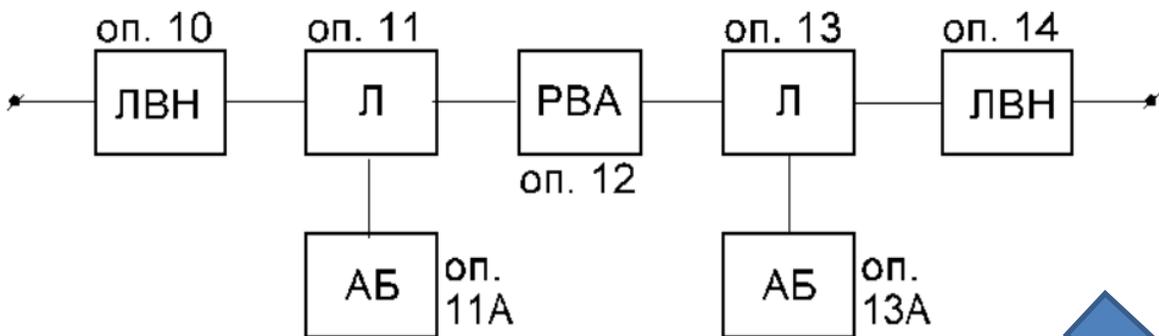
«Уточненные» матрицы переходных вероятностей  $P_i^j$  для случаев II и IV:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,25} & 0 & 0 & \mathbf{0,75} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0,875} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,125} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



# 5. ПОЛУМАРКОВСКАЯ И СКРЫТАЯ МАРКОВСКАЯ МОДЕЛИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ

Рассматриваемый участок сети  
цифрового полигона СевГУ  
(оп. 10 - оп. 14)



Каждый элемент системы делится на два участка, на которых возможны аварии (см. Рис. 5.1). Определим  $q_1$  как вероятность того, что если случается авария, то она произошла на участке 1, т.е. источнике Т1 или линии от Т1 до ЛВН1. Соответственно,  $(1 - q_1)$  – авария на участке 2: на потребителе П1 или линии, прилегающей к П1.  $q_2$  и  $(1 - q_2)$  определяются аналогично.

$G_1, G_2$  – источники питания;  $\Pi_1, \Pi_2$  – потребители; РВА – реклоузер; ЛВН (QS) – выключатели нагрузки (неавтоматические делители линии (НДЛ)).

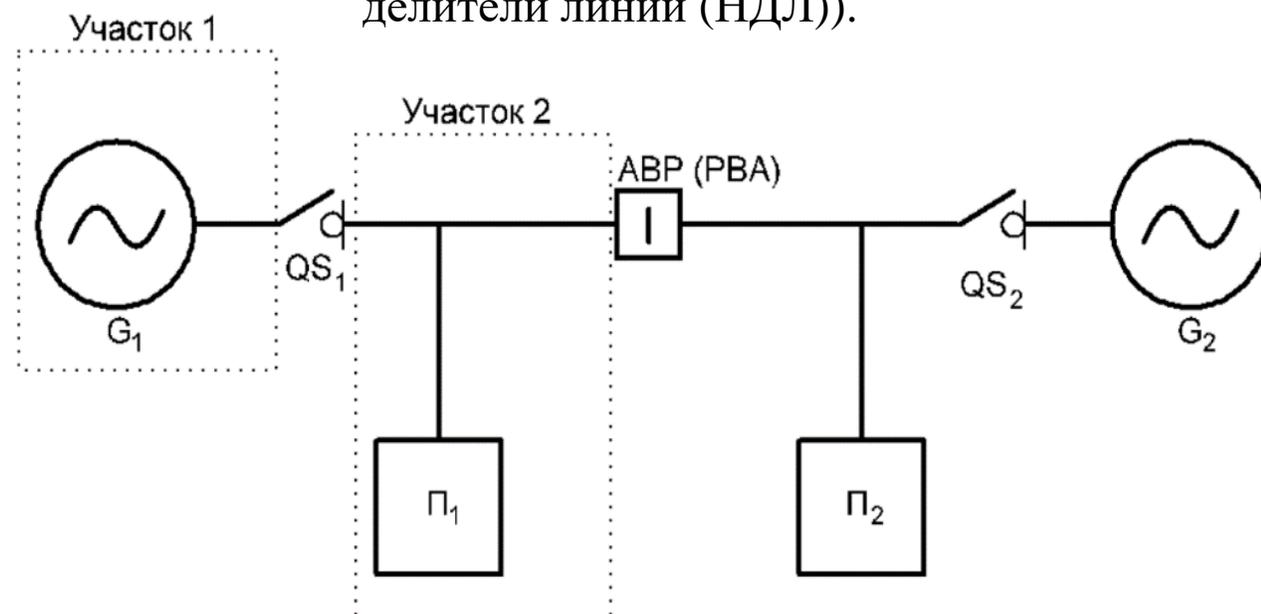


Рис. 5.1 – Структура системы и возможные участки аварий

Математической моделью рассматриваемой системы является суперпозиция двух альтернирующих процессов восстановления.

Система  $S$  состоит из двух элементов. Физически элемент системы представляет собой участок от источника до РВА, включая отпайку на ТП потребителя. Каждый из элементов системы может находиться в двух состояниях: рабочем или на восстановлении.

Времена безотказной работы элементов описываются случайными величинами  $\alpha_i$  имеющими функции распределения  $F_i(t) = P(\alpha_i \leq t)$  и плотности распределения  $f_i(t)$ . время восстановления – случайными величинами  $\beta_i$  имеющими функции распределения  $G_i(t) = P(\beta_i \leq t)$  и плотности распределения  $g_i(t)$ .

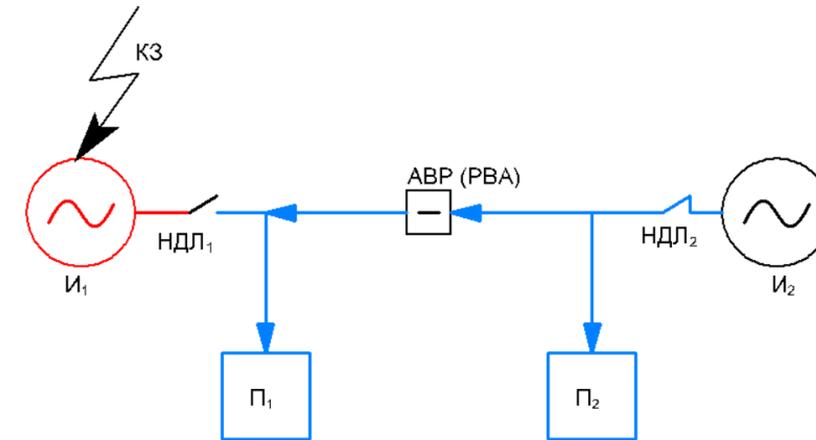


Рис. 5.2 – Авария на источнике И1 или линии от И1 до НДЛ1 (состояние 131х)

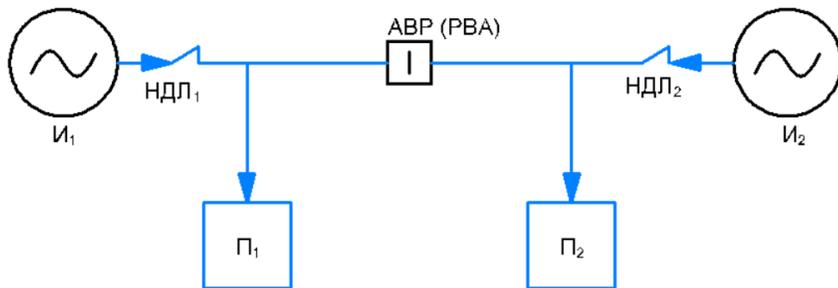


Рис. 5.3 – Нормальное состояние рассматриваемого участка сети (состояние 0)

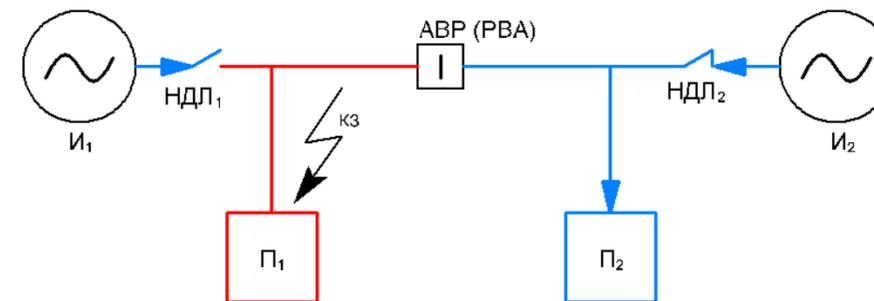


Рис. 5.4 – Авария на потребителе П1 или линии, прилегающей к П1 (состояние 101х)

Код	Состояние рассматриваемого участка системы	Описание события
0	Нормальное состояние (старт работы)	И1, И2 без повреждений, АВР(РВА) разомкнут
131х	Аварийное состояние (авария на первом источнике)	Авария на И1 или участке от И1 до ЛВН1, ЛВН 1 разомкнут, АВР(РВА) замкнут
111х	Нормальное состояние (после устранения причин аварии)	И1, И2 без повреждений, АВР(РВА) разомкнут (состояние после ремонта и пуска И1)
213х	Аварийное состояние (авария на втором источнике)	Авария на И2 или участке от И2 до ЛВН 2, ЛВН 2 разомкнут, АВР(РВА) замкнут
211х	Нормальное состояние (после устранения причин аварии)	И1, И2 без повреждений, АВР(РВА) разомкнут (состояние после ремонта и пуска И2)
200х	Аварийное состояние (выход из строя питающих линий / трансформаторов с обеих сторон)	И1 и И2 или линии на участке от И1 до ЛВН 1, ЛВН 1 и линии на участке от И2 до ЛВН 2, ЛВН 2 повреждены, П1, П2 без питания.
110х	Нормальное состояние системы (после восстановления)	Восстановлена подача питания на один из источников (Т1 или Т2), второй источник в ремонте, ближайший к неисправному источнику ЛВН разомкнут, АВР(РВА) замкнут
210х	Аварийное состояние (авария на линии или потребителе)	Авария на линии, прилегающей к И2, ЛВН2 отключен, АВР(РВА) разомкнут, П2 без питания.
100х	Аварийное состояние (выход из строя питающих линий/ трансформаторов с обеих сторон)	Авария на одном из источников питания (И1 или И2), авария на линии или потребителе (до НДЛ), прилегающей к исправному источнику
201х	Нормальное состояние (после устранения причин аварии)	Авария на линии, прилегающей к И1, восстановление питания от И2, АВР(РВА) замкнут, потребители П1 и П2 получают питание
101х	Аварийное состояние (авария на линии, прилегающей к потребителю)	Авария на линии, прилегающей к потребителю П1, ЛВН 1 разомкнут, АВР(РВА) разомкнут

## 2. Полумарковская модель системы

Фазовое пространство состояний системы имеет вид:

$$E = \{0, 131x, 213x, 111x, 200x, 101x, 210x, 211x, 100x, 110x, 201x\}$$

При кодировке использовалась следующая логика обозначений:

- 0 – начальное состояние;
- $id_1d_2x$  – остальные состояния,

где  $i$  показывает номер элемента, в котором произошло изменение состояния,

непрерывная компонента  $x$  определяет время до следующей смены состояния системы, а

$$d_k = \begin{cases} 0, & \text{если элемент восстанавливается,} \\ 1, & \text{если элемент работоспособен,} \\ 3, & \text{если элемент работоспособен} \\ & \text{за счет другого элемента.} \end{cases}$$

Стационарное распределение вложенной цепи Маркова (ВЦМ) имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho(111x) &= \rho_0 \bar{F}_2(x), \rho(211x) = \rho_0 \bar{F}_1(x), \rho(131x) = \rho_0 q_1 \bar{F}_2(x), \\ \rho(213x) &= \rho_0 q_2 \bar{F}_1(x), \rho(101x) = \rho_0 (1 - q_1) \bar{F}_2(x), \rho(210x) = \rho_0 (1 - q_2) \bar{F}_1(x), \\ \rho(110x) &= \rho(100x) = \rho_0 \bar{G}_2(x), \rho(201x) = \rho(200x) = \rho_0 \bar{G}_1(x), \end{aligned}$$

где константа  $\rho_0$  находится из условия нормировки,  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ .

Средние времена пребывания в состояниях системы:

$$\begin{aligned} 131x: \theta_{131x} &= \beta_1 \wedge x, M_{131x} = \int_0^x \bar{G}_1(t) dt; & 213x: \theta_{213x} &= \beta_2 \wedge x, M_{213x} = \int_0^x \bar{G}_2(t) dt; \\ 111x: \theta_{111x} &= \alpha_1 \wedge x, M_{111x} = \int_0^x \bar{F}_1(t) dt; & 200x: \theta_{200x} &= \beta_2 \wedge x, M_{200x} = \int_0^x \bar{G}_2(t) dt; \end{aligned}$$

где  $\wedge$  – знак минимума,  $M\theta$  – математическое ожидание.

Для определения среднего стационарного времени безотказной работы  $T_+$ , среднего стационарного времени восстановления  $T_-$  и стационарного коэффициента готовности  $K_{\Gamma}$  используются формулы:

$$T_+ = \frac{\int_{E_+} m(e) \rho(de)}{\int_{E_+} P(e, E_-) \rho(de)}, \quad T_- = \frac{\int_{E_-} m(e) \rho(de)}{\int_{E_+} P(e, E_-) \rho(de)}, \quad K_{\Gamma} = \frac{T_+}{T_+ + T_-},$$

где  $E_+$  множество работоспособных состояний,  $E_-$  множество отказовых состояний,  $\rho(de)$  стационарное распределение ВЦМ,  $P(e, E_-)$  вероятности перехода ВЦМ во множество отказовых состояний  $E_-$ ,  $m(e)$  средние времена пребывания полумарковского процесса в состоянии  $e \in E$ .

Возможны следующие случаи:

1. Когда хотя бы один из потребителей получают электроэнергию.

$$E_+ = \{131x, 213x, 111x, 101x, 210x, 211x, 110x, 201x\}, \quad E_- = \{200x, 100x\}$$

$$T_+ = \frac{M\alpha_1 M\alpha_2 + M\beta_1 M\alpha_2 + M\alpha_1 M\beta_2}{M\beta_1 + M\beta_2}, \quad T_- = \frac{M\beta_1 M\beta_2}{M\beta_1 + M\beta_2}, \quad K_{\Gamma} = \frac{M\alpha_1 M\alpha_2 + M\beta_1 M\alpha_2 + M\alpha_1 M\beta_2}{(M\alpha_1 + M\beta_1)(M\alpha_2 + M\beta_2)}.$$

2. Когда оба потребителя получают электроэнергию:

$$E_+ = \{131x, 213x, 111x, 211x\}, \quad E_- = \{101x, 210x, 110x, 201x, 200x, 100x\}.$$

$$T_+ = \frac{q_1 \int_0^\infty \bar{F}_2(x) dx \int_0^x \bar{G}_1(t) dt + q_2 \int_0^\infty \bar{F}_1(x) dx \int_0^x \bar{G}_2(t) dt + M\alpha_1 M\alpha_2}{q_1 M(\alpha_2 \wedge \beta_1) + q_2 M(\alpha_1 \wedge \beta_2) + (1 - q_1) M\alpha_2 + (1 - q_2) M\alpha_1},$$

$$T_- = \frac{M\alpha_2 M\beta_1 + M\alpha_1 M\beta_2 + M\beta_1 M\beta_2 - q_1 \int_0^\infty \bar{F}_2(x) dx \int_0^x \bar{G}_1(t) dt - q_2 \int_0^\infty \bar{F}_1(x) dx \int_0^x \bar{G}_2(t) dt}{q_1 M(\alpha_2 \wedge \beta_1) + q_2 M(\alpha_1 \wedge \beta_2) + (1 - q_1) M\alpha_2 + (1 - q_2) M\alpha_1},$$

$$K_\Gamma = \frac{q_1 \int_0^\infty \bar{F}_2(x) dx \int_0^x \bar{G}_1(t) dt + q_2 \int_0^\infty \bar{F}_1(x) dx \int_0^x \bar{G}_2(t) dt + M\alpha_1 M\alpha_2}{(M\alpha_1 + M\beta_1)(M\alpha_2 + M\beta_2)},$$

$$M(\alpha \wedge \beta) = \int_0^\infty \bar{F}(t) \bar{G}(t) dt$$

Разобьем фазовое пространство состояний  $E$  исходной модели на  $N=10$  классов и применим к ним алгоритм стационарного фазового укрупнения:

$$E_{111} = \{111x\}, E_{131} = \{131x\}, E_{213} = \{213x\}, E_{211} = \{211x\}, E_{101} = \{101x\}, \\ E_{110} = \{110x\}, E_{210} = \{210x\}, E_{201} = \{201x\}, E_{100} = \{100x\}, E_{200} = \{200x\}.$$

Фазовое пространство состояний  $\hat{E}$  укрупненной модели имеет вид:

$$\hat{E} = \{0, 111, 211, 131, 231, 101, 210, 110, 201, 100, 200\}.$$

Коды фазовых состояний  $\hat{E}$  имеют следующий физический смысл:

- 111 (211) – первый (второй) источник питания запущен после ремонта, оба потребителя получают питание;
- 131 (213) – авария на первом участке источника 1(2), потребитель 1(2) получает питание за счет источника 2(1) благодаря замыканию реклоузера;
- 101 (210) – авария на втором участке источника 1(2), потребитель 1(2) отключен, реклоузер разомкнут, потребитель 2(1) получает питание;
- 110 (201) – восстановлена подача питания на источник 1(2), источник 2(1) в ремонте, потребитель 2 (1) получает питание за счет источника 1(2) благодаря замыканию реклоузера;
- 100 (200) – выход из строя питающих линий/трансформаторов с обеих сторон, оба потребителя без питания.

Для нахождения переходных вероятностей  $\hat{P}_k^r$  между укрупненными состояниями, средних времен пребывания в них, воспользуемся (3), вероятностями перехода исходной модели (2) и следующими формулами [14, с.36]:

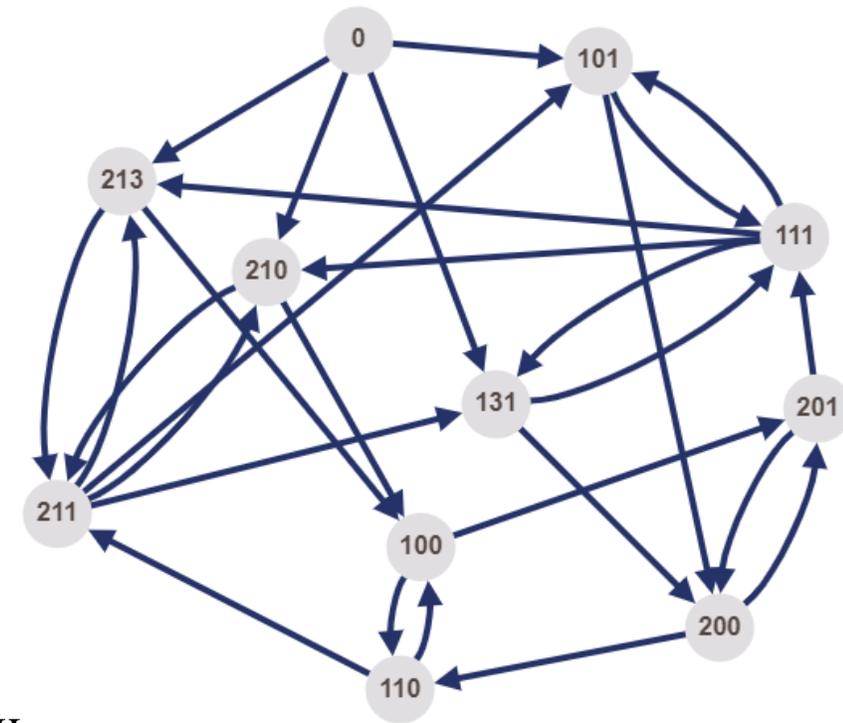
$$\hat{P}_k^r = \frac{\int \rho(de)P(e, E_r)}{\rho(E_k)}, \quad \hat{m}_k = \frac{\int \rho(de)m(e)}{\rho(E_k)}, \quad k, r = \overline{1, N},$$

$\rho(de)$  – стационарное распределение ВЦМ,  $P(e, E_r)$  – вероятности перехода ВЦМ,  $m(e)$  средние времена пребывания в состояниях.

Вероятности  $\hat{P}_k^r$  переходов между укрупненными состояниями модели равны:  $\hat{P}_0^{131} = \int_0^\infty P_0^{131x} dx = q_1 \int_0^\infty dx \int_0^\infty f_2(x+t) f_1(t) dt = q_1 \int_0^\infty \bar{F}_2(t) f_1(t) dt = q_1 M(\alpha_2 > \alpha_1)$ ,

$$\hat{P}_0^{213} = q_2 \int_0^\infty \bar{F}_1(t) f_2(t) dt = q_2 M(\alpha_1 > \alpha_2), \quad \hat{P}_0^{101} = (1 - q_1) \int_0^\infty \bar{F}_2(t) f_1(t) dt = (1 - q_1) M(\alpha_2 > \alpha_1),$$

$$\hat{P}_0^{210} = (1 - q_2) \int_0^\infty \bar{F}_1(t) f_2(t) dt = (1 - q_2) M(\alpha_1 > \alpha_2), \quad M(\alpha \wedge \beta) = \int_0^\infty \bar{F}(t) \bar{G}(t) dt$$



**Рис. 5.5.** Граф переходов между укрупненными состояниями

Перейдем к построению СММ на основе полученной укрупненной полумарковской модели. Зададим 5 параметров, которые полностью определяют СММ.

1. Множество состояний модели соответствует состояниям  $\hat{E}$  укрупненной модели.
2. Предположим, что состояния ВЦМ укрупненной модели не наблюдаются (скрытые состояния) во время смены состояний ВЦМ, а можно наблюдать (получить информацию) только о количестве потребителей, получающих электроэнергию.

Следовательно, множество сигналов модели имеет вид:

$$J = \{0, 1, 2\},$$

где 0 – оба потребителя не получают электричество; 1 – только один из потребителей получает электричество; 2 – оба потребителя получают электричество.

3. Матрица переходных вероятностей СММ состоит из вероятностей  $\hat{P}_k^r$ .
4. Функция связи  $R(s|x)$  состояний СММ с сигналами задается таблицей 1.
5. Предположим, что в начальный момент времени  $t = 0$  СММ с вероятностью 1 находится в начальном состоянии (0). Получаем следующий вектор начального распределения вероятностей модели:

$$\pi(x) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Состояние, $x$	0	111	211	131	213	101	210	110	201	100	200
Сигнал, $s$											
$s=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
$s=1$	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
$s=2$	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0

**Таблица 5.1.** Функция связи  $R(s|x)$  состояний СММ с сигналами.

Предположим, что в результате функционирования системы  $S$  получен следующий вектор сигналов:

$$\bar{s}_{30} = (2,2,2,2,2,1,2,2,2,2,2,2,2,1,2,2,2,2,2,1,0,2,2,2,2,1,2,2,2,2), n=30.$$

Для представленного вектора  $\bar{s}_{30}$ , ответим на следующие вопросы:

### 1. Каковы вероятности состояний модели в момент испускания 30-го сигнала?

На 30ом шаге укрупненная модель находилась в состоянии 131 с вероятностью 0,46723, в состоянии 213 с вероятностью 0,53277. В остальных состояниях – с нулевой вероятностью.

## 2. Каковы вероятности переходов в состояния на следующем шаге?

Вероятности переходов СММ на 31ом шаге следующие:

в состояние 111 – 0,45825; в состояние 211 – 0,52211;

в состояние 100 – 0,01065; в состояние 200 – 0,00899.

## 3. Каковы вероятности испускания сигналов на следующем шаге?

На 31ом шаге сигнал 2 испускается (появляется) с вероятностью 0,98036, сигнал 0 – 0,01964.

## 4. Какова вероятность получения (появления) вектора сигналов $\bar{s}_{30}$ ?

Вероятность получения  $\bar{s}_{30}$  равна  $3.5 \cdot 10^{-6}$ .

## 5. Найти наиболее вероятные состояния СММ на переходах, соответствующие $\bar{s}_{30}$ ? (смотри Таблицу 5.2)

Transition	3	6	8	13	15	17	20	21	22	26	29
State	211	101	213	211	111	211	210	100	110	101	211
Probability	0.582	0.511	0.573	0.576	0.520	0.565	0.513	0.513	0.546	0.515	0.567

Таблица 5.2. Наиболее вероятные состояния СММ на переходах.

1. В работе рассмотрены возможности применения суперпозиции независимых полумарковских процессов для моделирования многокомпонентных систем энергетики. Показано, что этот подход позволяет избавиться от ряда ограничений, в частности, от предположения об экспоненциальном законе распределения. Он дает возможность учесть в модели системы контроль, техническое обслуживание, временное резервирование и т.д. В отличие от некоторых других методов нахождения характеристик надёжности и эффективности систем энергетики, он позволяет находить не только вероятностные, но и временные характеристики системы.

2. В работе построена полумарковская модель автономного ВДК, позволяющая рассчитать стационарные и временные характеристики надежности. Затем на ее основе разработана скрытая марковская модель, которая используется для нахождения оценок характеристик автономного ВДК и прогнозирования его состояний на основе полученного в результате функционирования вектора сигналов. Результаты исследования позволят прогнозировать режимы работы автономного ВДК. Полученная СММ позволяет переоценивать параметры построенной модели (обучать) для повышения ее адекватности, согласно получаемым в процессе функционирования сигналам. Результаты исследования получены в общем виде и инвариантны относительно законов распределения случайных величин, описывающих элементы автономного ВДК. Они позволяют моделировать функционирование системы при различных законах распределения, основываясь на статистических данных, не видоизменяя саму модель.

3. Полученные результаты иллюстрируют возможности применения аппарата теории скрытых марковских моделей для оценки и прогнозирования состояний систем на примере участка интеллектуальной распределительной электрической сети. Используя алгоритм Баума-Велша, можно уточнять параметры исходной модели, чтоб они наилучшим образом согласовывались с вектором сигналов. Применение алгоритма Витерби дает возможность определять наиболее вероятную цепочку состояний по вектору сигналов.

4. Разработаны полумарковские модели двух- и многокомпонентных систем с поэлементным мгновенно пополняемым резервом времени. Их существенной особенностью является то, что случайные величины времени безотказной работы, времени восстановления и резерва времени имеют функции распределения общего вида. Получены расчетные аналитические и приближенные формулы для нахождения стационарных характеристик надежности и эффективности рассматриваемых систем, на примере которых показано, что асимптотический и стационарный алгоритмы фазового укрупнения могут быть эффективно использованы для анализа систем с резервом времени.

5. Решена задача анализа надежности и эффективности нефтепровода с поэлементными резервуарными парками, результаты которой при должной технологической переформулировке можно использовать для анализа надежности и эффективности системы газопровода с подземными хранилищами газа, системы водоснабжения с резервуарами на каждом участке, информационной системы с поэлементными хранилищами данных, систем электроэнергетики с поэлементными накопителями энергии.

## **Финансовая поддержка исследований:**

- 1. гранты Российского фонда фундаментальных исследований № 15-01-05840, № 18-01-00392а.**
- 2. государственное задание № 1.10513.2018/11.12 Министерством образования и науки Российской Федерации.**
- 3. Грант Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук № МК-329.2022.4.**

## Публикации в изданиях, индексируемых в базе Scopus / Web of Science

1. Обжерин Ю.Е. Полумарковские и скрытые марковские и полумарковские модели систем энергетики / Ю.Е. Обжерин // Известия Российской академии наук. Энергетика. – 2019. – № 5. – С. 26– 32.
2. Obzherin, Y.E., Sidorov, S.M., Nikitin, M.M. Reliability of the information system with intermediate storage devices // Communications in Computer and Information Science, Vol. 919, 2018. P. 432-444.
3. Obzherin, Yu.E., Sidorov, S.M., Nikitin, M.M. Analysis of reliability of systems with component-wise storages // E3S Web of Conferences, Vol. 58, 2018. Art. No. 02024.
4. Obzherin, Y.E., Sidorov, S.M., Nikitin, M.M. Hidden Markov Model of Information System with Component-Wise Storage Devices // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), Vol. 11965, 2019. P. 354-364.
5. Obzherin, Yu.E., Sidorov, S.M. Semi-Markov Model and Phase-Merging Scheme of a Multi-Component System with the Group Instantly Replenished Time Reserve // International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, Vol. 26, No. 3, 2019. Art. no.1950014.
6. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М., Никитин, М.М. Анализ надежности и фазовое укрупнение систем с поэлементными накопителями / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров, М.М. Никитин // Известия Российской академии наук. Энергетика. – 2019. – № 6. – С. 66– 77.
7. Obzherin, Y., Nikitin, M., Sidorov, S. Analysis of reliability and efficiency of electric power systems on the basis of semi-markov models with common phase space of states // Smart Innovation, Systems and Technologies, Vol. 154, 2020. P. 631-641.
8. Obzherin, Yu.E., Sidorov, S.M., Nikitin, M.M. On application of semi-Markov processes superposition to energy systems modeling // E3S Web of Conferences, Vol. 139, 2019. Art. No. 01064.
9. Obzherin, Yu.E., Sidorov, S.M., Nikitin, M.M. Semi-Markov model of a multi-component energy system with component-wise storages // E3S Web of Conferences, Vol. 139, 2019. Art. No. 01065.
10. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М., Никитин, М.М. Применение суперпозиции независимых полумарковских процессов и скрытых марковских моделей к моделированию систем энергетики. Известия Российской академии наук. Энергетика. – 2020. – № 3. – С. 69–80.
11. Obzherin, Y., Nikitin, M., Sidorov, S. (2020). Analysis of Reliability and Efficiency of Electric Power Systems on the Basis of Semi-Markov Models with Common Phase Space of States. Smart Innovation, Systems and Technologies, vol 154. Springer, Singapore. [https://doi.org/10.1007/978-981-13-9267-2\\_52](https://doi.org/10.1007/978-981-13-9267-2_52).
12. Obzherin Y.E., Nikitin M.M., Sidorov S.M. Hidden Markov model based on signals from blocks of semi-Markov system's elements and its application for dynamics analysis energy systems. Smart Innovation, Systems and Technologies. Singapore: Springer. 2021. Vol. 187. P. 477–486.
13. Обжерин Ю.Е. Полумарковская и скрытая марковская модели функционирования автономного ветродизельного комплекса // Информационные и математические технологии в науке и управлении. – 2022. – № 4(28). – С. 70-82. DOI: 10.38028/ESI.2022.28.4.005.

Вид публикации:	Количество:
Scopus, Web of Science	18
Перечень ВАК	12
Программы ЭВМ	3
РИНЦ	15
Доклады на МНТК	10

Задание параметров системы

Вид системы

- Система с кумулятивным резервом времени
- Система с мгновенно пополняемым резервом времени
- Другая система

Продолжить      Отмена

Система с кумулятивным резервом времени

Резерв времени: 0,887

Наработка на отказ  $\alpha$

Вид распределения:

- Экспоненциальное
- Эрланга
- Вейбулла-Гнеденко
- Задать распределение

Время восстановления  $\beta$

Вид распределения:

- Экспоненциальное
- Эрланга
- Вейбулла-Гнеденко
- Задать распределение

р1: 1,0      3,0      р1: 2      р2: 1,0

Принять параметры      Отмена

Программа анализа надежности и эффективности систем с резервом времени

Система    Результаты    Справка

Система: С кумулятивным резервом времени

Скрыть результаты

$T_+ = 2,12291$   
 $T_- = 1,58483$   
 $K_r = 0,572563$

Программа анализа надежности и эффективности систем с резервом времени

Система    Результаты    Справка

Система: С мгновенно пополняемым резервом времени

Скрыть результаты

$T_+ = 3$   
 $T_- = 1$   
 $K_r = 0,75$





*Спасибо за  
внимание*

*Сидоров Станислав Михайлович, к.т.н., доцент* кафедры «Высшая математика»  
Севастопольский государственный университет, Россия, г. Севастополь, ул.  
Университетская, 33, e-mail: [xaevac@mail.ru](mailto:xaevac@mail.ru)

*Обжерин Юрий Евгеньевич, д.т.н., профессор,* профессор кафедры «Высшая  
математика» Севастопольский государственный университет, Россия, г. Севастополь,  
ул. Университетская, 33, e-mail: [objsev@mail.ru](mailto:objsev@mail.ru)