

О МОДЕЛИРОВАНИИ НЕДИССИПАТИВНОГО КИНЕМАТИЧЕСКОГО ДИНАМО НА НЕКОМПАКТНОМ МНОГООБРАЗИИ

А.М.Лукацкий

Институт энергетических
исследований РАН

(E-MAIL macrolab@eriras.ru,
lukatskii.a.m.math@mail.ru)

1. Аннотация, ключевые слова

Аннотация: Рассматриваются модели крупномасштабных объектов, в которых наблюдается эффект недиссипативного кинематического динамо. Конструкция динамо строится для финитных бездивергентных векторных полей и диффеоморфизмов в n -мерном пространстве. Используется конструкция продолжения векторного поля с единичной сферы до бездивергентного финитного векторного поля в пространстве.

Ключевые слова: диффеоморфизм, векторное поле, сохраняющий элемент объема диффеоморфизм, бездивергентное векторное поле, действие диффеоморфизма, экспоненциальное раздутие векторного поля, недиссипативное кинематическое динамо.

2. Постановка проблемы, I

Модели, в которых возникает кинематическое динамо, связаны с крупномасштабными физическими объектами [1-5]. Пусть имеется ориентированное риманово многообразие D возможно с границей ∂D . Кинематическое динамо приводит к задаче построения пары из сохраняющего объем области D диффеоморфизма

$$F : D \rightarrow D$$

и гладкого бездивергентного векторного поля v на D таких, что последовательное действие диффеоморфизма на векторное поле v вызывает показательный рост кинетической энергии у векторных полей

$$(F_*)^n v ,$$

получающихся в процессе итераций.

3. Постановка проблемы, II

Одна из конструкций, позволяющая построить кинематическое динамо, связана с задачей продолжения произвольного диффеоморфизма, изотопного тождественному, границы области ∂D до сохраняющего объем диффеоморфизма области D .

Проблема построения подобного продолжения была сформулирована Арнольдом [6].

Ранее автором была предложена конструкция продолжения для n -мерного шара B^n и полнотория T^n [7-8].

В настоящем исследовании будет рассмотрено R^n . В случае некомпактного многообразия физический смысл имеют не общего вида бездивергентные векторные поля, а имеющие конечную кинетическую энергию и достаточно быстро стремящиеся к нулю на бесконечности.

Здесь мы ограничимся финитными векторными полями.

4. Математическое описание модели, I

Пусть дано n -мерное пространство $\mathbb{R}^n$ с координатами $x_1, \dots, x_n$ и единичная $n-1$ -мерная сфера $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, заданная уравнением:

$$r^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1. \quad (1)$$

Она ограничивает единичный шар B^n в n -мерном пространстве, $B^n \subset \mathbb{R}^n$, $\partial B^n = S^{n-1}$.

Мы ограничимся рассмотрением финитных (имеющих компактный носитель) векторных полей, в частности, это гарантирует соблюдение ограничений на рост векторного поля на бесконечности.

Для риманова многообразия D обозначим через $SVect_0(D)$ алгебру Ли бездивергентных финитных векторных полей на D . На $SVect_0(D)$ имеется положительно определенная билинейная форма – кинетическая энергия.

$$\langle u, v \rangle = \int_D (u(x), v(x)) dx, \quad (2)$$

которая конечна для пары финитных векторных полей.

5. Математическое описание модели, II

В [9] была предложена конструкция продолжения полиномиальных бездивергентных векторных полей определенных на B^n до бездивергентных финитных векторных полей на R^n .

Общая схема построения недиссипативного кинематического динамо в R^n заключается в том, что используется действие конформной группы Ли $SO(1, n+1)$ на единичной сфере $S^{n-1} \subset R^n$.

Например, для $n = 3$ группа $SO(1, 4)$ является известной в специальной теории относительности группой Лоренца.

Берется алгебра Ли $so(1, n+1)$ группы $SO(1, n+1)$. Хотя векторные поля из $so(1, n+1)$ естественным образом продолжаются на R^n , их продолжения не являются ни бездивергентными, ни финитными.

6. Математическое описание модели, III

Поэтому векторные поля из $so(1, n+1)$ продолжаются сначала до полиномиальных бездивергентных векторных полей внутри единичного шара B^n , используя конструкцию [8].

После этого получившиеся полиномиальные бездивергентные поля с единичного шара B^n продолжаются до финитных бездивергентных векторных полей на R^n , используя конструкцию [9]. В итоговой конструкции для продолжения векторных полей предъявляются явные формулы.

Таким образом, недиссипативное кинематическое динамо удастся получить с использованием коммутационных соотношений алгебры Ли $so(1, n+1)$, а также некоторых общих фактов теории кинематического динамо.

7. Математическое описание модели, IV

Алгебру Ли $so(1, n + 1)$ образуют векторные поля, являющиеся градиентами координатных функций в смысле стандартной римановой метрики на S^{n-1} :

$$e^i = \nabla_{S^{n-1}} x_i \text{ с координатами } e^i_i = 1 - x_i^2, e^i_j = -x_i x_j, j \neq i, \quad (3)$$

а также векторные поля алгебры Ли $so(n + 1)$ группы ортогональных преобразований $SO(n + 1)$:

$$h^{i,j}, i < j \text{ с координатами } h^{i,j}_i = x_j, h^{i,j}_j = -x_i. \quad (4)$$

8. Математическое описание модели, V

Имеют место следующие коммутационные соотношения

$$[h^{i,j}, e^i] = e^j, [h^{i,j}, e^j] = -e^i, [e^j, e^i] = h^{i,j}. \quad (5)$$

Введем векторные поля

$$a = e^2 + h^{1,2}, b = e^1,$$

9. Конструкции продолжения для построения кинематического динамо, I

Для дальнейшего существенным будет коммутационное соотношение

$$[a, b] = b.$$

Векторные поля e^i не являются бездивергентными полями в шаре B^n , имеем

$$\operatorname{div} e^i = -(n+1)x_i.$$

Следуя [6], введем векторные поля

$$se^i \text{ с координатами } se^i_i = e^i_i + \frac{n+1}{2}(r^2 - 1), \quad se^i_j = e^i_j, \quad j \neq i.$$

(6)

Имеем

$$\operatorname{div} se^i = 0,$$

$$se^i|_{S^{n-1}} = e^i.$$

10. Конструкции продолжения для построения кинематического динамо, II

Утверждение 1.

Бездивергентные векторные поля

$se^i, h_{i,j}$ на шаре B^n

могут быть продолжены до финитных бездивергентных векторных полей на $\mathbb{R}^n$.

11. Конструкции продолжения для построения кинематического динамо, III

Обозначим финитные бездивергентные продолжения векторных полей $se^i, h_{i,j}$ на $\mathbb{R}^n$ через $E^i, H^{i,j}$.

Положим

$$A = E^2 + H^{1,2}, B = E^1,$$

Векторные поля A, B касаются подмногообразия $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. На $n-1$ мерной сфере имеем

$$[A|_{S^{n-1}}, B|_{S^{n-1}}] = B|_{S^{n-1}}. \quad (7)$$

12. Эффект экспоненциального роста на $(n-1)$ -мерной сфере S^{n-1} , I

Обозначим через $\exp(tB)$, – поток векторного поля B на $\mathbb{R}^n$. В силу финитности векторного поля B его поток определен для любого t . Таким образом, можно определить действие диффеоморфизмов этого потока на векторное поле A :

$$A^t = \exp(tB) \cdot (A).$$

Известно [10], что

$$\left. \frac{d}{dt} A^t \right|_{t=\tau} = [A^\tau, B].$$

Тогда на $n-1$ -мерной сфере из (7) получаем

$$\left. \frac{d}{dt} A^t \right|_{t=\tau} \Big|_{S^{n-1}} = A^\tau \Big|_{S^{n-1}}.$$

Отсюда следует, что

$$A^t \Big|_{S^{n-1}} = \exp(t) A \Big|_{S^{n-1}}.$$

13. Эффект экспоненциального роста на $(n-1)$ -сфере S^{n-1} , II

Таким образом, на S^{n-1} имеет место экспоненциальное раздутие векторного поля A при действии потоком векторного поля B .

Если ввести сохраняющий элемент объема диффеоморфизм $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$F = \exp(B), \quad (8)$$

то на $n - 1$ мерной единичной сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, являющейся инвариантной относительно действия диффеоморфизма F , для касательного к S^{n-1} финитного бездивергентного на $\mathbb{R}^n$ векторного поля A имеет место эффект экспоненциального раздутия

$$(F \cdot)^n A|_{S^{n-1}} = \exp(n) A|_{S^{n-1}}. \quad (9)$$

14. Обоснование эффекта кинематического динамо в $\mathbb{R}^n$

Утверждение 2.

Действие (9) диффеоморфизма F (8) является недиссипативным кинематическим динамо.

Доказательство использует линеаризацию векторного поля B

в точке $p = (1, 0, \dots, 0) \in S^{n-1}$,

которая имеет вид

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \begin{pmatrix} (n-1)x_1, (n+1)x_2, \dots, (n+1)x_n \\ -x_2, -x_1, 0, \dots, 0 \\ \dots \\ -x_n, \dots, \dots, -x_1 \\ \cdot \end{pmatrix}.$$

15. ВЫВООДЫ

Для финитных бездивергентных векторных полей на $\mathbb{R}^n$ и сохраняющих элемент объема $\mathbb{R}^n$ диффеоморфизмов предложена конструкция недиссипативного кинематического динамо.

В ней используются свойства действия группы конформных преобразований единичной сферы S^{n-1} (при $n = 3$ группы Лоренца), коммутационные соотношения ее алгебры Ли $so(1, n + 1)$, а также продолжения векторных полей из $so(1, n + 1)$ до финитных бездивергентных векторных полей на $\mathbb{R}^n$.

Единичная сфера S^{n-1} является инвариантной относительно действий диффеоморфизмов, используемых в рамках конструкции динамо. При этом на самой единичной сфере имеет место экспоненциальное раздутие бездивергентного векторного поля степенями сохраняющего элемент объема диффеоморфизма, участвующего в недиссипативном кинематическом динамо.

16. ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я.Б. Магнитные поля в астрофизике / Я.Б. Зельдович, А.А. Рузмайкин, Д.Д. Соколов. – Москва – Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006.– 384 с.
2. Гинес В.З., Жужома Е.В., Починка О.В. Динамические системы и топология магнитных полей в проводящей среде // Современная математика. Фундаментальные направления . 2017. Т. 63. N 3. – С. 455–474.
3. Жужома Е.В., Медведев С.В. Недиссипативное кинематическое динамо на линзах // Журнал СВМО . 2017. Т. 19. N 2. – С. 53–59.
4. Arshakian T., Beck R., Krause M., Sokoloff D.. Evolution of magnetic fields in galaxies and future observational tests with the Square Kilometre Array // Astron. Astrophys. 2009. Vol. 494, N1. – p. 21 –32.
5. Арнольд В.И. Топологические методы в гидромеханике / В.И. Арнольд, Б.А. Хесин. – М.: МЦНМО, 2007. – 392 с.
6. Арнольд В.И. Задачи Арнольда / В.И. Арнольд. – М.: Фазис, 2000. . – 453 с.
7. Лукацкий А.М. О задаче продолжения диффеоморфизмов // Международная конференция "Анализ и особенности", посвященная 75-летию Владимира Игоревича Арнольда. Тезисы докладов. – М: МИАН, 2012.. – С. 76–77.
8. Лукацкий А.М. О конструкции продолжения локальных бездивергентных векторных полей на $\mathbb{R}^n$ // Научный вестник МГТУ ГА. 2015. N220. – С. 88–94.
9. Lukatsky A.M. A construction of diffeomorphism extension and its application // Научный вестник МГТУ ГА. 2014. N204. – С. 130-134.
10. Бишоп Р. Геометрия многообразий / Р. Бишоп, Р. Критенден. – М.: Мир, 1967. – 335 с.

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ