Программный комплекс генерации задачи полилинейного программирования

А.М.Лукацкий

Институт энергетических исследований РАН

(E-MAIL macrolab@eriras.ru)

Обзор имеющихся подходов

Модели, в которых главной формой описания служат полилинейные функции (ПФ), встречаются во многих областях. Например, таковыми являются различного рода модели балансового типа, описанные в [1].

Основным методом решения таких задач служит обобщенный метод релаксаций (ОМР), в котором исследуемая модель приводится к задаче полилинейного программирования (ПП), [2].

Предложенный в [2] алгоритм использовался также в [3].

Имеется реализация ОМР в рамках комплекса CREATOR-DIGGER [4-6]. В технологии этого комплекса задача ПП получает алгебраическое описание в виде иерархического набора взаимосвязанных ПФ.

Специфика предложенного подхода

- В то же время можно выделить класс моделей, для которых более удобной оказывается форма представления задачи ПП в виде большой сводной таблицы. Первоначально родственная форма представления задачи ПП была предложена в [2] в виде двух табличных структур. В обозначениях [2] ими являлись:

- таблица мономов *HM*;
- таблица полилинейных ограничений *SM*

- В описываемом походе таблицы *HM* и *SM* объединяются в одну сводную таблицу, обозначаемую *T*, синтаксис которой описывается ниже.

Технология представления задачи ПП

- Таблица *T* мономов и ПФ создается пользователем в экранном редакторе и сохраняется в текстовом файле, который затем обрабатывается системой. В процессе работы с моделью пользователь может считывать описание задачи ПП в удобно обозримой форме, многократно корректировать как параметры рассматриваемой модели, так и до определенной степени ее структуру . После того, как модель сформирована, пользователь запускает в режиме on-line процедуру интерпретации описания в задачу математического программирования, с последующими расчетами на модели и выдачей результатов в удобной для пользователя форме.

- Для конвертирования *T*-представления задачи ПП в формат, который затем может обрабатываться процедурой решения задачи математического программирования, разработан диалоговый программный комплекс.

Синтаксис описания задачи ПП

- Таблица *T*, используемая для представления задачи полилинейного программирования, имеет следующую структуру:

- Столбцы *T* разбиваются на 2 группы:
- мономы $\{mon_1, \ldots, mon_r\}$, присутствующие в полилинейных ограничениях и критерий задачи ПП;
- свободный член ограничений *add*.

- Строки таблицы *T* разбиваются на 3 группы:
- переменные модели $\{var_1, \ldots, var_n\}$;
- полилинейные ограничения модели $\{pol_1,\ldots, pol_m\}$;
- полилинейный критерий оптимизации *obj*.

Алгоритм построения задачи ПП по таблице *T*

- Шаг 1. В строке переменной var_k и столбце монома mon_l ставится 1, если эта переменная входит в данный моном, в противном случае 0. Столбец *add* для этой строки нулевой.
- Шаг 2. В строке полилинейного ограничения pol_k и столбце монома mon_k вводится величина коэффициента при этом мономе в полилинейном ограничении. В столбец *add* в этой строке вводится величина свободного члена в ограничении pol_k.
- Шаг 3. В строке полилинейного критерия *obj* и столбце монома mon_k вводится величина коэффициента при этом мономе в полилинейном критерии. В столбец *add* в этой строке вводится величина свободного члена в критерии *obj*.

Режимы модификации задачи ПП

- Работая в редакторе, пользователь может менять
- коэффициенты и свободный член в каждом ограничении и критерии. Эти модификации относятся к параметрам модели;
- признак {0;1} инцидентности переменной моному. Эти модификации относятся к структуре модели.

- Описанный комплекс имеет преимущества при генерации моделей, в которых основными являются скалярные показатели, либо векторные и матричные показатели, но такие, что в модели имеются операции над их фрагментами, не имеющие удобного выражения в векторном или матричном виде.

Проверка ограничений задачи ПП на слабость и несовместность (I)

- Здесь мы предположим, что для каждой переменной задачи ПП имеются двусторонние диапазонные ограничения:
- $a_k \le var_k \le b_k$, $1 \le k \le n$. (1)
- Преобразованиями сдвига и масштабирования переменных можно привести диапазонные ограничения к нормализованному виду:
- $0 \le var_{1k} \le 1$, $1 \le k \le n$. (2)

Каждая из ПФ имеет вид:

- $pol_l = a_1 * mon_1 + \ldots$
- $+ a_t * mon_t + \ldots + a_r * mon_r + add_l$ (3)

Проверка ограничений задачи ПП на слабость и несовместность (II)

- Алгоритм контроля ограничений на слабость и несовместность приобретает следующий вид. Для каждой из ПФ $1 \leq l \leq m$ в формулу (3):

- Подставим вместо монома mon_t , $1 \leq t \leq r$, 1, если коэффициент a_t при этом мономе в ПФ положителен, 0 – , если отрицателен. Просуммируем по всем мономам и прибавим свободный член add_l, получим величину v_l .
- Подставим вместо монома mon_t , $1 \leq t \leq r$, 0, если коэффииент a_t при этом мономе в ПФ положителен, 1 – , если отрицателен. Просуммируем по всем мономам и прибавим свободный член add_l, получим величину u_l .

Проверка ограничений задачи ПП на слабость и несовместность (III)

- **Предложение 1**.
- Для полилинейной функции pol_l ее величина, когда переменные принимают значения в диапазонах (2), будут лежать в диапазоне:
- $u_l \le pol_l \le v_l$. (4)
- **Следствие 1**.
- Если диапазон (4) лежит в отрицательной полупрямой, $v_l < 0$, то ограничение, задаваемое ПФ pol_l , несовместно, а значит, и вся система ограничений модели несовместна.
- Если диапазон (4) лежит в неотрицательной полупрямой, $u_l \ge 0$, то ограничение, задаваемое ПФ pol_l , слабое, а значит, его можно удалить из системы ограничений модели.

Пример 1 задач ПП, решаемых с применением описанной технологии (I)

- Приведем пример записи в виде ПФ известной в линейной алгебре операции векторного произведения. Пусть в модели имеются векторные переменные u[i], v[i], w[i] , векторный индикатор s[i] , $1 \le i \le 3$ и скалярный индикатор q. Тогда операция векторного произведения $u \times v = s$ описывается тремя билинейными ПФ:
- s[1] = u[2]*v[3] – u[3]*v[2]
- s[2] = -u[1]*v[3] + v[1]*u[3]
- s[3] = u[1]*v[2] - u[2]*v[1]
- Приведем также трилинейную ПФ, выражающую ориентированный объем параллелепипеда, натянутого векторами u,v,w :
- q = u[1]*v[2]*w[3] + u[2]*v[3]*w[1] + v[1]*w[2]*u[3] – u[3]*v[2]*w[1] - u[2]*v[1]*w[3] –
- v[3]*w[2]*u[1]

Пример 1 задач ПП, решаемых с применением описанной технологии (II)

- В таблицах 1-2 описывается модель, решающая геометрические задачи, связанные с этими операциями.
-
- Построить три вектора по условиям:
-
- векторное произведение первых двух попадает в заданный диапазон;
- ориентированный объем параллелепипеда, натянутого тройкой векторов максимален.
-
- Координаты диапазона в условиях задачи специфицируются на этапе запуска оптимизации.

Пример 1 задач ПП, решаемых с применением описанной технологии (III)

Таблица 1. Фрагмент 1 полилинейной модели, описывающей операции над векторами.

	mon1	mon2	mon3	mon4	mon5	mon6	Add
u[1]			1		1		
u[2]	1					1	
u[3]		1		1			
v[1]				1		1	
v[2]		1			1		
v[3]	1		1				
w[1]							
w[2]							
w[3]							
s[1]	1	-1					
s[2]			-1	1			
s[3]					1	-1	
Q							

Пример 1 задач ПП, решаемых с применением описанной технологии (IV)

Таблица 2. Фрагмент 1 полилинейной модели, описывающей операции над векторами.

	mon7	mon8	mon9	mon10	mon11	mon12	Add
u[1]	1					1	
u[2]		1			1		
u[3]			1	1			
v[1]			1		1		
v[2]	1			1			
v[3]		1				1	
w[1]		1		1			
w[2]			1			1	
w[3]	1				1		
s[1]							
s[2]							
s[3]							
Q	1	1	1	-1	-1	-1	

Пример 2 задач ПП, решаемых с применением описанной технологии (I)

- Модель содержит 12 переменных:
- var_1, var_2, var_3, var_4, var_5, var_6, var_7, var_8, var_9, var_{10}, var_{11}, var_{12}.

- Ограничения модели имеют вид:
- $pol_1 = var_2*var_6 – var_3*var_5 + var_8*var_{12} – var_9*var_{11} -1 \geq 0$
- $pol_2 = -var_1*var_6 + var_3*var_4 – var_7*var_{12} + var_9*var_{10} +2 \geq 0$
- $pol_3 = 32*var_1*var_5 – var_2*var_4 - var_7*var_{11} + var_8*var_{10} -8 \geq 0$
- $pol_4 = -var_2*var_{12} – var_3*var_{11} + var_5*var_9 + var_6*var_8 +1 \geq 0$
- $pol_5 = var_1*var_{12} + var_3*var_{10} – var_4*var_9 – var_6*var_7 +2 \geq 0$
- $pol_6 = -var_1*var_{11} + var_2*var_{10} + var_4*var_8 – var_5*var_7 +3 \geq 0$
- Целевая функция задается следующим образом:
- $pol_7 = var_1*var_4 + var_2*var_5 – var_7*var_{10} – var_8*var_{11}$

- Диапазонные ограничения на переменные имеют вид (2).

Пример 2 задач ПП, решаемых с применением описанной технологии (II)

Таблица T включает 36 столбцов, соответствующих мономам второго порядка, и столбец свободных членов ограничений. Из этих мономов образуются семь ПФ. где первые шесть – это ограничения модели, а седьмая ПФ является критерием оптимизации.

- Из предложения 1 и следствия 1 вытекает, что ограничения, задаваемые ПФ pol_2 , pol_5 , pol_6 , являются слабыми и могут быть исключены.
- Для критерия pol_7 задачи ПП с использованием диапазонных ограничений (2) на переменные оценка (4) дает:

- $pol_7 \leq 2.$ (5)

Пример 2 задач ПП, решаемых с применением описанной технологии (III)

- Описанная в таблицах 3-5 модель является билинейной и имеет декомпозицию на 2 линейные фазы. При запуске процедуры ОМР было установлено максимальное число итераций при поиске оптимального решения, – 100. Однако, процедуре ОМР потребовалось всего 2 итерации для получения оптимального решения. Начальное значение критерия при начальном значении всех переменных 0.5 составляло 0, впрочем, в начальной точке система ограничений имеет невязки (pol_1 , pol_3), поэтому его нельзя сопоставлять со значением в точке максимума, где невязки погашены), и было улучшено ОМР до 2.

- Заметим, что верхняя оценка (5) для критерия здесь достигнута, таким образом, ОМР нашел абсолютный максимум задачи ПП при следующих значениях переменных:
- $var_1 = 1$, $var_2 = 1$, $var_3 = 0$, $var_4 = 1$, $var_5 = 1$, $var_6 = 0.5$, $var_7 = 0$, $var_8 = 1$, $var_9 = 0$, $var_{10} = 0.5$, $var_{11} = 0$, $var_{12} = 0.5$.

Машинная реализация

- Описанный комплекс реализован в среде Microsoft Visual Studio 2008 под операционной системой WINDOWS-10. Был использован язык программирования Visual BASIC, а для информационной поддержки – MS EXCEL-2010. Все расчеты проводились в среде Visual BASIC.

- Программное обеспечение описанной системы оформлено авторскими свидетельствами [4, 7].

Сравнение с аналогами

В качестве аналога описанной выше технологии можно указать систему MATLAB [8]. Описанная в докладе технология имеет преимущества при генерации неоднородных полилинейных моделей, в которых основными являются скалярные показатели, а при наличии векторных и матричных характеристик, операции над их фрагментами не выполняются в виде векторно-матричных. Он позволяет, в частности, проводить анализ на слабость и несовместность ограничений модели не только для линейных фаз задачи ПП как это принято в традиционных технологиях, но и для задачи ПП в целом. Это позволяет в отдельных случаях констатировать абсолютный экстремум задачи ПП.

Выводы

Для определенного класса задач ПП удобно иметь компактную обозримую форму их представления. Предложенный подход позволяет свести в одну таблицу переменные модели, наложенные на них ограничения и критерий, а также весь перечень мономов, входящих в состав ПФ задачи ПП. Для моделей, допускающих такое представление, режим редактирования позволяет пользователю-непрограммисту быстро и эффективно проводить различного рода машинные эксперименты, в которых варьируются как параметры модели, так и определенные структурные аспекты. Появляются новые возможности проверки ограничений на слабость и несовместность, а также установление факта достижения экстремума.

Литература, I

1. Lukatskii A.M., Malakhov V.A, "Computer System of Organization of Multilinear Optimization Calculations on Models of Balance Type," Published in: 2020 13th International Conference "Management of large-scale system development" (MLSD), Date of Conference: 28-30 Sept. 2020, Date Added to IEEE Xplore: 09 November 2020, DOI: 10.1109/MLSD49919.2020.9247831, Publisher: IEEE Publication Year: 2020, Page(s): 1 - 5.

2. Лукацкий А.М., Шапот Д.В., “Методы решения задач полилинейного программирования,” Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 41, №. 5, 2001, с. 680-691.

3. Antonucci A., de Campos C.P., Huber D., Zaffalon M., “Credal Network Inferences by Linear Programming, in Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty,” Proceedings 12ty Eurepean Conference, ESCQARU 2013, Utrecht, The Netherlands, 2013, pp. 13-24.

4. Малахов В.А., Лукацкий А.М., Шапот Д.В., “Модель взаимосвязей энергетики с экономикой (МЭНЭК),” Сертификат государственной регистрации компьютерной программы, No. 2018611677 5 февраля, 2018.

Литература, II

5. Карбовский И.Н., “Технология полилинейного программирования в естественно-обусловленных моделях. I ,” Автоматика и телемеханика, 2014, № 9, с., 83-96.

6. Карбовский И.Н., “Технология полилинейного программирования в естественно-обусловленных моделях. II, ,” Автоматика и телемеханика, 2015, № 1, с.с. 91-100.

7. Лукацкий А.М., Шапот Д.В., “MULTILINPROGRAM, ” Сертификат государственной регистрации компьютерной программы, No. 2018619802, 13 августа, 2018.

8. Cleve Moler, "The Growth of MATLAB and The MathWorks over Two Decades". News & Notes News letter. MathWorks.(January 2006). Retrieved August 14, 2013.

Благодарю за внимание