СТРУКТУРИЗЦИЯ АЛГОРИТМОВ, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫХ ПОЛИЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

А.М.Лукацкий , Е.В. Дубынин

Институт энергетических исследований РАН

e-mail: lukatskii.a.m.math@mail.ru,

0667570@gmail.com

1. Аннотация, ключевые слова

Аннотация: *Рассматривается проблема структурного представления математических моделей, представляемых полилинейными функциями. Ранее была предложена матричная форма их описания. Она включает разделы переменных, мономов и полилинейных функций. По матричной автоматически генерируется задача математического программирования. Такое представление позволяет ввести отношение сравнения между моделями этого класса, создавать базу данных моделей. Структурная форма представления моделей иллюстрируется примерами..*

Ключевые слова: полилинейные функции, тензоры,, матричное описание алгоритмов, сравнение алгоритма, база полилинейных моделей.

2. **Постановка проблемы, I**

Структурное представления является важным моментом при разработке цифровых технологий. В этой связи, возникает задача структурного представления моделей из различных предметных областей.

Здесь можно выделить класс моделей, описываемых полилинейными функциями (ПФ) от переменных модели. Этот класс моделей широко используется в, макроэкономические модели балансового типа. Он может возникать в физических областях, где физические законы допускают тензорное представление, например, в уравнениях общей теории относительности. Также здесь можно назвать чисто математические конструкции, скажем внешняя алгебра на конечномерном векторном пространстве.

3. Постановка проблемы, II

Для определенного класса полилинейных моделей удобным оказывается описание полилинейной модели в виде матрицы. Матричная форма представления задачи ПП предложена в [6]. Она включает в себя 3 раздела:

- переменных,
- мономов,
- полилинейных функций.

Матричная форма удобна для отображения в экранном редакторе. Она позволяет пользователю видеть модель в целом, что не имеет места для представления в виде алгебраической системы формул связи.

4. Матричное описание полилинейной модели, I

Матричной формой представления полилинейной модели является одна сводная таблица T, которая имеет следующую структуру.

Таблица 1. Общее описание полилинейной модели.

	monomial$_1$	. . .		***monomial***$_t$	***free term***
variable$_1$	1	. . .		0	
. . .	. . .	. . .		. . .	
variable$_n$	0	. . .		1	
indicator$_1$	6			-3	7
. . .	. . .	. . .		. . .	. . .
indicator$_m$	-1			8	-10
criterion	-2			4	3

Заполнение клеток в таблице 1 носит иллюстративный характер.

5. Матричное описание полилинейной модели, II

Пользователь сам формирует матриичное описание полилинейной модели, работая в экранном редакторе. ячейки. Он должен соблюдать следующие соглашения.

- в ячейки $variable_i \times monomial_j$можно вводить только признаки инцидентности 0 или 1.;
- в ячейки $indicator_i \times monomial_j$ можно вводить вещественные числа;
- в ячейки$criterion \times monomial_j$ можно вводить вещественные числа,
  Если в полилинейной задаче отсутствует критерий (требуется найти любое допустимое решение),
  то эта строка не заполняется;
- в столбец freeterm можно вводить вещественные числа, но только для строк $indicator_i$ и $criterion$.

6. Нормализация полилинейной модели

Предполагается, что для каждой переменной модели имеются двусторонние диапазонные ограничения:

$$a_k \leq variable_k \leq b_k \,, 1 \leq k \leq \ n. \qquad (1)$$

Применяя преобразования сдвига и масштабирования приводят диапазонные ограничения (1)
к нормализованному виду:

$$0 \leq w_k \leq 1, 1 \leq k \leq \ n. \qquad (2)$$

Система ограничений задачи ПП и критерий приобретают следующий вид.
Полилинейные ограничения:

$$pol_l = a_1^l * mon_1 + \cdots + a_t^l * mon_t + \ c_l \geq 0 \,,\ 1 \leq l \leq \ m \ (3)$$

критерий:

$$obj = a_1 * mon_1 + \cdots + a_t * mon_t + c.. \qquad (4)$$

7. **Линейная модель, ассоциированная с полилинейной**

С нормализованной полилинейной моделью
можно связать линейную модель, где переменные, -
мономами полилинейной модели

$mon_1, \ ..., \ mon_t$

с диапазонными ограничениями на эти переменные

$$0 \leq mon_l \leq 1, \ 1 \leq l \leq \ t, \qquad (5)$$

системой ограничений (3),

критерием (4) .

8. **Пример 1 полилинейной модели**

Пусть имеется трехмерное пространство $\mathbf{R}^3$ с операцией векторное произведение. Зададим вектора $u=(u_1,u_2,u_3)$, $v=(v_1,v_2,v_3)$.
Обозначим векторное произведение $w = u \times v$.
Тогда координаты $w=(w_1,w_2,w_3)$
будут полилинейными функциями.

$w_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2$, $w_2 = - u_1 v_3 + u_3 v_1$, $w_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1$.

Список переменных содержит 6 наименований:

$(u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3)$.

Список мономов содержит 6 наименований:

$mon_1=u_1 v_2$. $mon_2= u_2 v_1$. $mon_3=u_1 v_3$.
$mon_4= u_3 v_1$. $mon_5=u_2 v_3$. $mon_6=u_3 v_2$.

9. **Матричное представление полилинейной модели примера 1**

Таблица 1 . Описание полилинейной модели примера 1

	mon_1	mon_2	mon_3	mon_4	mon_5	mon_6	***free term***
u_1	1	0	1	0	0	0	
u_2	0	1	0	0	1	0	
u_3	0	0	0	1	0	1	
v_1	0	1	0	1	0	0	
v_2	1	0	0	0	0	1	
v_3	0	0	1	0	1	0	
w_1	1	-1	0	0	0	0	0
w_2	0	0	-1	1	0	0	0
w_3	0	0	0	0	1	-1	0

Здесь опущена строка критерия. Достаточно найти любое допустимое решение.
Геометрически это означает построить два вектора,
векторное произведение которых лежит в 1-м координатном октанте.

10. **Пример 2 полилинейной модели с критерием**

Дополним полилинейную модель из примера 1 критерием.
Введем постоянный вектор

$z = (1,1,1)$.

В качестве критерия возьмем скалярное произведение
Векторного произведения u,v на z., т.е. смешаное
произведение векторов.

$obj = (u \times v, z) = <u,v,z>$. .

Тогда критерий имеет вид.

$obj = u_2 v_3 - u_3 v_2, w_2 - u_1 v_3 + u_3 v_1 ,+ u_1 v_2 - u_2 v_1$.

Список переменных и мономов при этом не меняется.

11. **Матричное представление полилинейной модели примера** 2

Таблица 2 . Описание полилинейной модели примера 3

	mon_1	mon_2	mon_3	mon_4	mon_5	mon_6	***free term***
u_1	1	0	1	0	0	0	
u_2	0	1	0	0	1	0	
u_3	0	0	0	1	0	1	
v_1	0	1	0	1	0	0	
v_2	1	0	0	0	0	1	
v_3	0	0	1	0	1	0	
w_1	1	-1	0	0	0	0	0
w_2	0	0	-1	1	0	0	0
w_3	0	0	0	0	1	-1	0
obj	1	-1	-1	1	1	-1	0

Геометрически это означает :
построить два вектора,
векторное произведение которых лежит в 1-м координатном октанте,
а ориентированный объем, натянутый этими двумя векторами
и постоянным вектором, максимален.

12. **Пример 3 полилинейной модели**

Пусть имеется n-мерное пространство $\mathbf{R}^n$, на котором задана операция алгебры Ли. Зададим вектора $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$.
Обозначим операцию в алгебре Ли $w = [u , v]$.
Тогда координаты $w=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ будут полилинейными функциями, зависящими от мономов $u_\mathrm{i} v_{\mathrm{j}}$, $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$.
Список переменных содержит $2n$ наименований:

$(u_1,u_2,\ldots,u_n,v_1,v_2,\ldots,v_\mathrm{n})$.

Список мономов содержит $n(n-1)$ наименований:
Коэффициенты полилинейных функций w_k , $k=1,\ldots,n$, определяются структурными константами алгебры Ли.

Известно, что трехмерное пространство с операцией векторное произведение изоморфно алгебре Ли трехмерной ортогональной группы so(3). Поэтому таблица 1 может служить описанием алгебры Ли so(3).
Геометрически она может описывать твердое тело в трехмерном пространстве, закрепленное в точке.

13. **Материальный баланс**

Уравнение материального баланса продуктов.
Модель Леонтьева.

$$C_k + Exp_k - Im_k + Inv_k + Zap_k = x_k M_k - \sum_{j=1}^{n} M_j\, a_{k,j}\, x_j \quad ,$$

$$k = 1, \dots, n \qquad (6)$$

M_k – мощность отрасли k,

C_k – конечное потребление продукта k,

Exp_k – экспорт продукта k, Imp_k – импорт продукта k,

Zap_k – сальдо запасов продукта k, Inv_k – инвестиции продукта k,

x_k – интенсивность загрузки мощности отрасли k.

$a_{k,j}$ удельные материальные затраты.

Переменные $x_1, \dots, x_n$, [$Zap_1, \dots, Zap_n$].

14. **Добавленная стоимость**

Добавленная стоимость отрасли при выпуске продуктов. Модель Леонтьева.

$$D_k = p_k x_k M_k - p_k Zap_k - \sum_{j=1}^{n} M_k p_j a_{j,k} x_k ,$$

$k = 1, \dots, n$ (7)

p_k – индекс цены

продукта k.

Переменные $x_1 ,\dots, x_n$, $p_1 ,\dots, p_n$,[$Zap_1 ,\dots, Zap_n$].

15. **Структура модели Леонтьева**

Список переменных.

Переменные x_1 ,…, x_n , p_1 ,…, p_n ,[Zap_1 ,…, Zap_n].

Мономы $x_к p_j$, ,[$Zap_k\, p_k$].

Количество мономов в модели Леонтьева n^2+[n].

16. **Функционал выбросов**

Выбросы при производстве продуктов.
Модель Леонтьева.

$$W_k = \sum_{j=1}^{n} g_{j,k} M_k a_{j,k} x_k \quad ,$$

$$k = 1, \ldots, n$$

W_k – выбросы отрасли k,

$g_{j,k}$ удельные выбросы отрасли k

при прямом потреблении продукта j.

Суммарные выбросы :

$$W = \sum_{k=1}^{n} W_k \qquad (8)$$

Это линейный функционал.

17. **Задача сокращения выбросов**

Постановка 1.
Материальный баланс (6)
$W \to \min$
Это задача ЛП

Постановка 2.
Финансовый баланс (7)
$W \to \min$
Это задача полилинейного программирования

18 **Обобщение модели**

Многопродуктовые отрасли.

Модель Неймана-Гейла.

$V_{j,k}$ – максимальный выпуск продукта j отраслью k,

$M_k = \sum_{j=1}^{n} V_{j,k}$ – мощность отрасли k. ,

Переменные $x_1, \ldots, x_m$, $p_1, \ldots, p_n$, [$Zap_1, \ldots, Zap_n$].

Далее обобщаются формулы модели Леонтьева.

$x=(x_1, \ldots, x_m)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $V= \{ V_{j,k} \}$, $A= \{ a_{j,k} \}$

19. **Обобщение постановки 1**

Уравнение материального баланса продуктов.
Модель Неймана-Гейла.

$$C_j + Exp_j - Im_j + Inv_j + Zap_j = \sum_{k=1}^{m} (V_{j,k} - M_k\, a_{j,k}) x_k ,$$

$j = 1, \ldots, n$ (9)

$W \to \min$

W – функционал (8)

20. Выводы

Матричная форма позволяет структурировать модели из различных предметных областей. Она позволяет в единых терминах описывать различные классы моделей.

Это физические модели, абстрактно математические модели.

Применительно к экономико-математическим моделям выделяются модели балансового типа. получаем однородное прелставление как модели В единых терминах описывается как модель Леонтьева, так и модель Неймана-Гейла.

Формулируется задача сокращения выбросов. Выделяется линейная постановка этой задачи.

21. ЛИТЕРАТУРА

1. Вишневский К.О. Цифровые технологии в российской экономике / К.О. Вишневский, Л.М. Гохберг, В.В. Дементьев и др.; под ред. Л.М. Гохберга; Нац. исслед. ун-т. «Высшая школа экономики». – М.: НИУ ВШЭ, 2021. – 116 с. .

2. Lukatskii A M.; Malakhov V.A. Computer System of Organization of Multilinear Optimization Calculations on Models of Balance Type // Published in: 2020 13th International Conference "Management of large-scale system development" (MLSD). Date of Conference: 28-30 Sept. 2020, Date Added to IEEE Xplore: 09 November 2020, DOI: 10.1109/MLSD49919.2020.9247831..

3. Карбовский И.Н. Технология полилинейного программирования в естественно-обусловленных моделях. I // Автоматика и телемеханика. 2014. № 9. — С. 83—96.

4. Lukatskii A M.; Dubynin E.V. An Approach to Digitalization of Multilinear Models // 17th International Conference on Management of Large-Scale System Development (MLSD). Date of Conference: 24-26 Sept. 2024, Date Added to IEEE Xplore: 06 November 2024, DOI: 10.1109/MLSD61779.2024.10739467..