

МЕТОД ЦИФРОВИЗАЦИИ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ

А.М.Лукацкий , Е.В. Дубынин

Институт энергетических
исследований РАН

(E-MAIL macrolab@eriras.ru,
lukatskii.a.m.math@mail.ru)

1. Аннотация, ключевые слова

Аннотация: Рассматривается проблема цифрового представления полилинейных моделей. Ранее была предложена табличная форма их описания, которая включает разделы переменных, мономов и полилинейных функций. По ней автоматически генерируется задача математического программирования. Цифровое представление позволяет ввести бинарное отношение между полилинейными моделями по принципу “ослабления” алгоритмов модели.

Ключевые слова: полилинейные модели, задача полилинейного программирования, табличное описание алгоритмов, ослабление алгоритма.

2. Постановка проблемы, I

Цифровизация технологий является весьма актуальной проблемой в настоящее время [1-3]. В этой связи, возникает задача цифрового представления моделей из различных предметных областей. Здесь можно выделить класс полилинейных моделей, описываемых системами ограничений из полилинейных функций (ПФ) от переменных модели. Таковыми являются, например, макроэкономические модели балансового типа [4].

Они приводят к задачам полилинейного программирования (ПП). Основным методом их решения служит обобщенный метод релаксаций (OMP) [5,6]. Реализация OMP имеется в программном комплексе CREATOR-DIGGER и основана на описании задачи ПП в виде иерархического набора взаимосвязанных полилинейных функций (ПФ).

3. Постановка проблемы, II

Для определенного класса полилинейных моделей удобным оказывается описание задачи ПП в виде одной сводной таблицы. Такая форма представления задачи ПП предложена в [7]. Она включает в себя разделы:

- переменных,
- мономов,
- полилинейных функций.

Пользователь работает с этой формой в экранном редакторе, причем ввод и коррекция касается одной сводной таблицы. Он может модифицировать описание задачи ПП в том числе параметры модели, а также ее структуру.

По описанной форме автоматически генерируются как структуры данных задачи ПП, так и алгоритмы ее обработки.

4. Математическое описание модели, I

Формой представления задачи ПП является сводная таблица T , которая имеет следующую структуру.

Таблица 1. Общее описание полилинейной модели.

	<i>monomial₁</i>	...		<i>monomial_t</i>	<i>free term</i>
<i>variable₁</i>	1	...		0	
...	...	...		...	
<i>variable_n</i>	0	...		1	
<i>indicator₁</i>	6			-3	7
...	...	...		...	...
<i>indicator_m</i>	-1			8	-10
<i>criterion</i>	-2			4	3

Заполнение клеток в таблице 1 носит иллюстративный характер.

5. Математическое описание модели, II

Пользователь формирует табличное описание задачи ПП. Работая в экранном редакторе с таблицей T , пользователь может вводить и корректировать ее ячейки. При этом он должен соблюдать следующие соглашения.

- в ячейки $variable_i \times monomial_j$ можно вводить только значения 0 или 1, а также заменять одно такое значение на другое в процессе коррекции;
- в ячейки $indicator_i \times monomial_j$ можно вводить вещественные числа, а также заменять одно число на другое в процессе коррекции;
- в ячейки $criterion \times monomial_j$ можно вводить вещественные числа, а также заменять одно число на другое в процессе коррекции. Если в полилинейной задаче отсутствует критерий (требуется найти любое допустимое решение), то эта строка не заполняется;

Примечание. В столбец $freeterm$ можно вводить и корректировать числа, но только для строк $indicator$ и $criterion$.

6. Нормализация полилинейной модели

Здесь предположим, что для каждой переменной модели имеются

двусторонние диапазонные ограничения:

$$a_k \leq variable_k \leq b_k, 1 \leq k \leq n.$$

(1)

Применим преобразования сдвига и масштабирования $w_k = (variable_k - a_k) / (b_k - a_k)$, $1 \leq k \leq n$.

Они приводят диапазонные ограничения (1) к нормализованному виду:

$$0 \leq w_k \leq 1, 1 \leq k \leq n. \quad (2)$$

После соответствующего пересчета коэффициентов и свободный членов,

система ограничений задачи ПП и критерий приобретают следующий вид.

Полилинейные ограничения:

$$pol_l = a_1^l * mon_1 + \dots + a_t^l * mon_t + c_l \geq 0, 1 \leq l \leq m \quad (3)$$

критерий:

$$obj = a_1 * mon_1 + \dots + a_t * mon_t + c.. \quad (4)$$

7. Переход от нормализованной формы к задаче ЛП

Система ограничений (2-4) определяет задачу ПП*, назовем ее нормализованной.

С ней можно связать задачу линейного программирования ЛП*, переменными которой служат символы мономов полилинейной задачи ПП* $mon_1, \dots, mon_t$ с диапазонными ограничениями на эти переменные

$$0 \leq mon_l \leq 1, \quad 1 \leq l \leq t, \quad (5)$$

ограничениями (3) и критерием (4).

8. Задача ЛП как ослабление задачи ПП

Утверждение 1.

1. Если задача ЛП* (4-5) несовместна, то несовместна и задача ПП*(2-4).
2. Если задача ПП* (2-4) совместна, то совместна и задача ЛП*(4-5).

Пусть $\max LP$ и $\min LP$

максимальное и минимальное значения критерия obj ЛП*задачи (4-5). Тогда критерий задачи ПП* будет лежать в диапазоне

$$\min LP \leq obj \leq \max LP. \quad (6)$$

Оно вытекает из того свойства, что любое решение полилинейной задачи ПП* (2-4) определяет решение задачи линейного программирования ЛП*(4-5), обратное же неверно.

9. Введение бинарного отношения на классе полилинейных моделей

Определение 1.

Задача $ПП^*_2$ является ослаблением задачи $ПП^*_1$, если

1. У этих задач совпадают наборы переменных.
2. Любое решение задачи $ПП^*_1$ является решением задачи $ПП^*_2$.

Обозначим это отношение: $ПП^*_1 \subset ПП^*_2$.

Непосредственно проверяется, что оно рефлексивно, транзитивно, но не симметрично, таким образом, не является отношением эквивалентности.

10. Достаточные условия наличия отношения ослабления между полилинейными моделями

Утверждение 2.

Пусть имеются две задачи ПП: $ПП^*_1$ и $ПП^*_2$ с общим набором переменных в нормализованной форме представления (2-4).

Пусть для каждого ограничения p задачи $ПП^*_2$ имеется ограничение q задачи $ПП^*_1$ такое, что

1. Для каждого монома в p коэффициент при нем в q не больше, чем в p (в том числе, если коэффициент при мономе в q нулевой, то в p он должен быть неотрицательный).
2. Свободный член в p не меньше, чем в q .

Тогда задача $ПП^*_2$ является ослаблением задачи $ПП^*_1$.

11. Использование наличия отношения ослабления для оценки абсолютного экстремума полилинейной задачи

Следствие 1.

Пусть задача $ПП^*_1$ является линейной (все мономы имеют 1-ю степень), совместной (имеющей допустимое решение), и имеется полилинейная задача $ПП^*_2$, причем задача $ПП^*_2$ является ослаблением задачи $ПП^*_1$. Тогда

1. ЛП задачу $ПП^*_1$ можно использовать для поиска допустимого решения полилинейной задачи $ПП^*_2$.
2. Максимум критерия ЛП задачу $ПП^*_1$ дает оценку снизу максимума критерия полилинейной задачи $ПП^*_2$.

Примечание 1.

Понятие ослабления применительно к алгоритмам введено в [8, с.669] для задачи поиска кратчайших путей на графе.

12. Примеры использование отношения ослабления для оценки абсолютного экстремума I

Пример 1.

Пусть имеется 3-х мерное пространство $\mathbf{R}^3$ с координатами (x,y,z) и задана система полилинейных ограничений:

$$\begin{aligned} pol_1 &= xy - \frac{1}{2} \geq 0, \\ pol_2 &= xz - \frac{1}{2} \geq 0, \\ pol_3 &= yz - \frac{1}{2} \geq 0, \end{aligned} \tag{7}$$

$$pol_4 = xy + xz + yz - \frac{9}{5} \geq 0,$$

$$pol_5 = -x - y - z + \frac{12}{5} \geq 0,$$

$$pol_6 = x + y + z + \frac{12}{5} \geq 0,$$

$$-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1.$$

Требуется найти любое допустимое решение полилинейной задачи

13. Решение примера 1

Представление полилинейной задачи в табличной форме имеет вид.

Таблица 2 . Описание полилинейной модели (7)

	<i>monomial</i> 1	<i>monomial</i> 2	<i>monomial</i> 3	<i>monomial</i> 4	<i>monomial</i> 5	<i>monomial</i> 6	<i>free term</i>
<i>x</i>	1	1	0	1	0	0	
<i>y</i>	1	0	1	0	1	0	
<i>z</i>	0	1	1	0	0	1	
<i>pol</i> 1	1	0	0	0	0	0	-1/2
<i>pol</i> 2	0	1	0	0	0	0	-1/2
<i>pol</i> 3	0	0	1	0	0	0	-1/2
<i>pol</i> 4	1	1	1	0	0	0	-9/5
<i>pol</i> 5	0	0	0	-1	-1	-1	12/5
<i>pol</i> 6	0	0	0	1	1	1	12/5

Приведем полилинейную систему (7) к нормализованному виду. Сделаем замену переменных:

$$u = (x + 1) / 2, v = (y + 1) / 2, w = (z + 1) / 2.$$

14. Решение примера 1

Получаем нормализованную полилинейную систему ПП^*_1

$$\text{pol}_1 = (2u - 1)(2v - 1) - \frac{1}{2} = -2u - 2v + 4uv + \frac{1}{2} \geq 0,$$

$$\text{pol}_2 = (2u - 1)(2w - 1) - \frac{1}{2} = -2u - 2w + 4uw + \frac{1}{2} \geq 0,$$

$$\text{pol}_3 = (2v - 1)(2w - 1) - \frac{1}{2} = -2v - 2w + 4vw + \frac{1}{2} \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \text{pol}_4 &= (2u - 1)(2v - 1) + (2u - 1)(2w - 1) + (2v - 1)(2w - 1) - \frac{9}{5} = \\ &= -4u - 4v - 4w + 4uv + 4uw + 4vw + \frac{6}{5} \geq 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{pol}_5 = -(2u - 1) - (2v - 1) - (2w - 1) + \frac{12}{5} = -2u - 2v - 2w + \frac{27}{5} \geq 0,$$

$$\text{pol}_6 = (2u - 1) + (2v - 1) + (2w - 1) + \frac{12}{5} = 2u + 2v + 2w - \frac{3}{5} \geq 0,$$

$$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1.$$

15. Решение примера 1

По полилинейной задаче (8) можно построить линейную задачу ЛП*₁.

$$lin_1 = -u - v + \frac{1}{4} \geq 0,$$

$$lin_2 = -u - w + \frac{1}{4} \geq 0,$$

$$lin_3 = -v - w + \frac{1}{4} \geq 0,$$

$$lin_4 = -u - v - w + \frac{3}{10} \geq 0, \quad (9)$$

$$lin_5 = -u - v - w + \frac{27}{10} \geq 0,$$

$$lin_6 = u + v + w - \frac{3}{10} \geq 0,$$

$$-1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1, -1 \leq w \leq 1.$$

Согласно утверждению 2 задача ПП*₁ является ослаблением задачи ЛП*₁. Из следствия 1 решение ЛП*₁ будет решением ПП*₁. Из линейной задачи (9), находим одно из допустимых решений ЛП*₁, оно дает допустимое решение полилинейной задачи ПП*₁: $u = 1/10$, $x = (2u-1) = -4/5$, $v = 1/10$, $y = (2v-1) = -4/5$, $w = 1/10$, $z = (2w-1) = -4/5$.

16. Использование ослабления для оценки абсолютного экстремума полилинейной задачи II

Пример 2.

Рассмотрим полилинейную задачу с критерием.

$$\begin{aligned} pol_1 &= xy - \frac{1}{2} \geq 0, \\ pol_2 &= xz - \frac{1}{2} \geq 0, \\ pol_3 &= yz - \frac{1}{2} \geq 0, \end{aligned} \tag{10}$$

$$pol_4 = -x - y - z + \frac{9}{4} \geq 0,$$

$$pol_5 = x + y + z + \frac{9}{4} \geq 0,$$

$$-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1.$$

$$obj = xy + xz + yz \rightarrow \max.$$

Требуется дать оценку критерия снизу.

17. Решение примера 2

Таблица описания полилинейной задачи ПП^*_2 имеет вид.

Таблица 3 . Описание полилинейной модели (10)

	<i>monomia</i> l_1	<i>monomia</i> l_2	<i>monomia</i> l_3	<i>monomia</i> l_4	<i>monomia</i> l_5	<i>monomia</i> l_6	<i>free</i> <i>ter</i> <i>m</i>
x	1	1	0	1	0	0	
y	1	0	1	0	1	0	
z	0	1	1	0	0	1	
pol_1	1	0	0	0	0	0	-1/2
pol_2	0	1	0	0	0	0	-1/2
pol_3	0	0	1	0	0	0	-1/2
pol_4	0	0	0	-1	-1	-1	9/4
pol_5	0	0	0	1	1	1	9/4
<i>criterio</i> n	1	1	1	0	0	0	0

18. Решение примера 2

Преобразованиями аналогичными приведенным выше получим линейную задачу ЛП*₂.

$$lin_1 = -u - v + \frac{1}{4} \geq 0,$$

$$lin_2 = -u - w + \frac{1}{4} \geq 0,$$

$$lin_3 = -v - w + \frac{1}{4} \geq 0,$$

$$lin_4 = -u - v - w + \frac{21}{8} \geq 0, \quad (11)$$

$$lin_5 = u + v + w - \frac{3}{8} \geq 0,$$

$$c = -4u - 4v - 4w + 3 \rightarrow \max,$$

$$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1.$$

19. Решение примера 2

Решение этой линейной задачи имеет вид: $u = 1/8$, $x = (2u-1) = -3/4$,
 $v = 1/8$, $y = (2v-1) = -3/4$, $w = 1/8$, $z = (2w-1) = -3/4$. Отсюда
получаем значение критерия полилинейной задачи $\Pi\Pi^*_2$:

$$obj = xy + xz + yz = \frac{27}{16}, \quad (12)$$

которое дает оценку оптимума критерия снизу.

Заметим, что из симметричности ограничений и критерия задачи $\Pi\Pi^*_2$ оптимум достигается, когда $x=y=z$. Это дает две точки оптимума:

$(3/4, 3/4, 3/4)$ и $(-3/4, -3/4, -3/4)$.

Таким образом, значение (12) дает не только оценку, но и сам абсолютный экстремум задачи $\Pi\Pi^*_2$.

20. Выводы

Табличное представление позволяет получить наглядное цифровое описание полилинейной модели. Оно позволяет также ввести бинарное отношение между полилинейными моделями по принципу ослабления задач ПП. Таким образом, удастся сравнивать различные модели.

Для класса полилинейных моделей, имеющих табличную форму представления, используя введенное бинарное отношение, в ряде случаев можно провести редукцию решения исходной задачи ПП к аналогичному, но более простого вида. Последнее дает возможность оценить оптимальные значения критерия исходной задачи или найти допустимое решение. В отдельных случаях это позволяет осуществить переход от решения задачи ПП к решению задачи ЛП.

Преимущество редукции задачи ПП к задаче ЛП состоит в том, что последняя дает возможность гарантированно находить допустимое и оптимальное решение, причем за более короткое время и с большей точностью, чем аналогичное для задачи ПП.

21. ЛИТЕРАТУРА, I

1. Вишневский К.О. Цифровые технологии в российской экономике / К.О. Вишневский, Л.М. Гохберг, В.В. Дементьев и др.; под ред. Л.М. Гохберга; Нац. исслед. ун-т. «Высшая школа экономики». – М.: НИУ ВШЭ, 2021. – 116 с. .
2. Пашкин С.А. Развитие цифровых платформ в России// Международный научно-исследовательский журнал. Социальные и гуманитарные науки. Экономика. Менеджмент. — Выпуск 1 (139) . — 2024. — DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2024.139.47>.
3. Резчиков А.Ф., Цвиркун А.Д., Дранко О.И., Степановская И.А. и др. Цифровая платформа мониторинга углеродного следа // Труды 15-й международной конференции MLSD2022. М.: ИПУ РАН. —. 2022 —. С. 1305—1310. DOI: 10.25728/mlsd.2022.
4. Lukatskii A M.; Malakhov V.A. Computer System of Organization of Multilinear Optimization Calculations on Models of Balance Type // Published in: 2020 13th International Conference "Management of large-scale system development" (MLSD). Date of Conference: 28-30 Sept. 2020, Date Added to IEEE Xplore: 09 November 2020, DOI: 10.1109/MLSD49919.2020.9247831. Publisher: IEEE Publication Year: 2020, Page(s): 1—5.
5. Лукацкий А.М., Шапот Д.В. Методы решения задач полилинейного программирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. т. 41. №. 5. — С. 680—691.
6. Карбовский И.Н. Технология полилинейного программирования в естественно-обусловленных моделях. I // Автоматика и телемеханика. 2014. № 9. — С. 83—96.

22. ЛИТЕРАТУРА, II

7. Lukatskii A.M. A Software Complex of Preparation for Solving a Multilinear Programming Problem // Published in: 2021 14th International Conference Management of large-scale system development (MLSD), Date of Conference: 27-29 September 2021, Date Added to IEEE Xplore: 22 November 2021, DOI: 10.1109/MLSD52249.2021.9600165. Publisher: IEEE Publication Year: 2021, Page(s): 1—5.
8. Кормен Т. Алгоритмы. Построение и анализ. —2-ое издание, пер. с англ. / Т. Кормен, Ч. Лейсерсон, Р. Ривест, К. Штайн. — М.: Издательский дом “Вильямс”, 2011. — 1296 с.
9. Bosco J., Etoa E. New optimal pivot rule for the simplex algorithm //Advances in Pure Mathematics. 2016. Vol. 6 — P. 647-658.
10. Lukatskii A.M. On One Approach to Elimination of Weak Inequalities in the Procedure of Convolution of Systems of Linear Inequalities // Published in: 2022 15th International Conference Management of large-scale system development (MLSD), Date of Conference: 27-29 September 2022, Date Added to IEEE Xplore: 09 November 2022, DOI: 10.1109/MLSD55143.2022.9934134. Publisher: IEEE Publication Year: 2022, Page(s): 1—5.
11. Лотов А.В., Рябиков А.И. Дополненный метод стартовой площадки для аппроксимации границы Парето в задачах с многоэкстремальными критериями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. т. 61. №. 10. — С. 1734—1744.
12. Лукацкий А.М., Шапот Д.В. MULTILINPROGRAM // Сертификат государственной регистрации компьютерной программы. 2018. 13 августа. N. 2018619802.