О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В МОДЕЛИ РОСТА ЭКОНОМИКИ

А.М.Лукацкий

Институт энергетических исследований РАН

lukatskii.a.m.math@mail.ru

1. **ОБЗОР НАПРАВЛЕНИЯ(I)**

Модели, использующие производственные функции Кобба-Дугласа впервые были применены в 1974 Sollow [1], Stiglitz,[2]. Там было показано, что рост потребления на душу населения возможен даже в случае, когда производство зависит от истощающегося ресурса, а население растет с постоянным темпом. Устойчивый рост потребления возникает в этих моделях в результате эффектов замещения между капиталом и ресурсом. Однако, этот результат сильно зависит от роста технологического прогресса, который в указанных моделях задавался экзогенно.

2. **ОБЗОР НАПРАВЛЕНИЯ(II)**

В последующих работах Suzuki [3](1976), Chiarella[4] (1980), Takayama [5](1980) указанный подход был обобщен на случай эндогенного технического прогресса. В частности, в [3] были определены условия, при которых устойчивый рост потребления достигается тем, что доходы от части выпуска инвестируются в технологический сектор, обеспечивающий рост знаний. Общей особенностью работ [1-3] является то, что в этих работах исследуется оптимальный план при допущении о постоянном росте потребления на душу населения. При этом проблема оптимального распределения выпуска между потреблением и накоплением не рассматривается.

3. **ОБЗОР НАПРАВЛЕНИЯ(III)**

В [4-5] рассмотрены более общие постановки: определяются оптимальные траектории потребления, использования истощающегося ресурса и капиталовложений в технологический сектор, которые максимизируют суммарную дисконтированную полезность потребления на бесконечном горизонте. Недостатком перечисленных моделей является то, что они, как правило, не учитывают экономических характеристик ресурсного сектора. Иными словами, ресурсный сектор в упоминаемых моделях не требует ни затрат, ни инвестиций, число занятых предполагается равным нулю. Единственная характеристика ресурсного сектора, которая рассматривается в моделях [1-5], — запасы истощающегося ресурса, причем для большинства моделей эти запасы конечны. Лишь в [5] рассмотрена возможность расширения сырьевой базы по мере роста потенциала знаний.

4. **ОБЗОР НАПРАВЛЕНИЯ(IY)**

В работах Петров, И.Г. Поспелов[6](1979), O.Hellman [7] (1980) построена односекторная модель развивающейся экономики.

Возможность замещения фактора энергоресурсов фактором НТП в модели роста экономики рассмотрена В.И. Китайгородским и автором в [8](1994) и автором в [9] (2014). Информационной базой для этих исследований послужил статистический материал, содержащийся в работах Дж. Кендрика [10-11], где описана структура капитала в экономике США для периода 1929-1969 г.г.

5. Постановка задачи

Настоящее исследование распространено на более поздний период (1969-1982г.г.). Использовались статистические данные, которые имеются в работах Э. Денисона [12-16], а также в [17] и в работах Ван дер Вее [18].

По сравнению с [8-9] для рассматриваемой модели оптимального управления расширен класс оптимизируемых функционалов.

Класс допустимых управлений в модели напротив сужен. Произведена “квантификация” управлений по аналогии с работой К. О. Бесова [19] (2014).

Уточнена бифуркационная диаграмма модели в терминах ограничений на параметры и начальные условия.

6. **ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ(I)**

Рассматривается модель экономической динамики, предполагающая, что экономика использует единый невозобновляемый энергоресурс. Наряду с сектором производства энергоресурса в модели имеется технологический сектор, результатом деятельности которого является развитие НТП, а такжепроизводственный сектор. Таким образом, строится динамическая модель экономики, в которой фазовое пространство имеет вид:

$V = \{P, F, Q\}$, где :

$P = P(t)$ — "уровень знаний" (характеристика НТП);

$F = F(t)$ — производственные фонды;

$Q = Q(t)$ — запасы невозобновляемого энергоресурса.

Потребление невозобновляемого энергоресурса связано с его запасами следующим уравнением:

$$R(t) = -\frac{dQ(t)}{dt},$$

причем предполагается, что прироста запасов не происходит.

7. **ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ(II)**

Зависимость выпуска от фазовых переменных задается производственной функцией:

$$Y(t) = AP(t)^{a} F(t)^{a_1} R(t)^{a_2}$$

Здесь обычно требуют, чтобы $a_1 + a_2 = 1$.

Заметим, что в описываемой модели дается трактовка "знаний" как сектора экономики. Поэтому фактор знаний $P(t)$ оценивается через стоимость фондов в секторе знаний. Чтобы избежать двойного счета, фонды сектора знаний вычитаются из фондов производственного. Подобная интерпретация знаний имеется в работах Дж. Кендрика [10-11].

8. **ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ(III)**

Особенностью рассматриваемой модели является учет растущих затрат на производство невозобновляемого энергоресурса. Динамика производства такого ресурса описывается уравнением $R(t)=bF_2(t)Q(t)/Q(0)$,

где $F_2(t)$ – основные фонды в ресурсном секторе;

$Q(0)$ – начальный энергоресурс;

b – начальная фондоотдача, выраженная в добыче на единицу основных фондов. В такой постановке текущая фондоотдача, определяемая как $b_1=bQ(t)/Q(0)$, будет убывать по мере истощения ресурса.

Важной характеристикой истощающегося ресурса является кратность, равная отношению текущих запасов к добыче: $Q(t)/R(t)$. Кратность показывает, на какой период времени может хватить имеющихся в данный момент запасов при условии, что добыча останется неизменной. Для упрощения выкладок в качестве вторичных фазовых переменных вводятся: $R(t)$ и $k=R(t)/Q(t)$,– темп истощения запасов(величина, обратная кратности добычи ресурса).

9. УПРАВЛЕНИЕ В МОДЕЛИ

Зададим управление в виде вектора инвестиций:

$$W=(W_p, W_f, W_q).$$

Здесь

W_p – инвестиции в знания (технологический сектор);

W_f – инвестиции в фонды (производственный сектор);

W_q – инвестиции в добычу (ресурсный сектор).

Обозначим

$$C(t)=Y(t)-W_p(t)-W_f(t)-W_q(t),$$

– потребление в момент t.

Введем функционал суммарного дисконтированного потребления

$I=\int_0^{+\infty} C(t)\exp(-\rho t)dt$, здесь ρ - дисконт.

10. **УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ**

Динамика модели задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = W_p - lP, \\ \dfrac{dF}{dt} = W_F - mF, \\ \dfrac{dk}{dt} = \dfrac{A_2}{Q(0)} W_q . \end{cases}$$

Здесь l, m — коэффициенты старения знаний и износа фондов соответственно.

11. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ(I)

Переформулируем постановку задачу в терминах оптимального управления. Ищется управление W (1) в классе допустимых, которое максимизирует функционал I, т.е. удовлетворяет ограничениям:

$$\begin{cases} C \geq 0, \\ W \geq (lP,\ mF, 0), \end{cases}$$

$$I \to \max,$$

Такой критерий исходит из предположения об однородности интегральной стоимостной оценки потребления на различных временных периодах.

12. **ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ(II)**

В то же время следует учесть, что структура потребления характеризуется набором материальных благ, номенклатура которых может меняться за продолжительный отрезок времени. Развитие фактора знаний, в свою очередь, может качественно обогащать структуру потребления. В этой связи возможна следующая модификация указанной постановки. Введем дополнительный функционал:

$$UI = \int_0^{+\infty} U(C(t))\exp(-\rho t)dt$$

Здесь в качестве U может быть взята выпуклая функция. Такая постановка рассматривалась в [5].

Легко видеть, что по мере количественного роста потребления C функционал UI существенно менее чувствителен к аддитивным добавкам, нежели I. Это свойство функционала UI позволяет учесть в модели аспекты, связанные с временной эволюцией корзины потребляемых материальных благ.

13. **УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА**

Для сформулированной таким образом задачи оптимального управления можно получить систему уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} \dfrac{aY}{P} = l + \rho, \; \dfrac{a_1 Y}{F} = m + \rho, \\ \dfrac{\frac{dY}{dt}}{\frac{dQ}{dt}} - Y \dfrac{\frac{d^2Q}{dt^2}}{\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2} = \rho \dfrac{Y}{\frac{dQ}{dt}} + Q(0) \dfrac{\rho^2}{A_2 a_2 Q} \end{cases}$$

14. ПОВЕДЕНИЕ НА ЭКСТРЕМАЛИ

Последнее из уравнений Эйлера приводится к виду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\ln Y}{R}\right)=\rho-\frac{Q(0)\rho^2 k}{A_2 a_2 Y}.$$

Отсюда следует, что на экстремали справедлива оценка:

$$\frac{Y}{Y(0)}<\exp(\rho t)\,\frac{R}{R(0)}.$$

Из этого получаем оценку для суммарного дисконтированного выпуска, которая служит мажорантой также для функционала I:

$$I\le\int_0^{+\infty}\exp(-\rho t)Ydt\le\frac{Y(0)}{k(0)}.$$

Поэтому решение, даваемое системой уравнений Эйлера, при заданном начальном темпе истощения ресурса всегда дает конечное значение для максимума функционала I. С другой стороны, машинные эксперименты на модели выявили наличие управлений, приводящих к бесконечному росту функционала I.

15. “КВАНТИФИКАЦИЯ” КЛАССА ДОПУСТИМЫХ УПРАВЛЕНИЙ”

В построенной модели естественно ограничить класс рассматриваемых управлений следующим образом. Введем временные такты $t = 0,1,2,\dots,k,\dots$ и будем считать, что все изменения в модели происходят в начале очередного такта из 1-го года ($i-1 \le t < i$). Тогда динамика модели описывается кусочно-постоянными функциями вида:

$$f(t) = c_i, i-1 \le t < i, i = 1,2,\dots,n,\dots$$

Ниже используется следующее утверждение.

Предложение. *Для описанного класса функций справедлив* L^1 *-аналог неравенства Коши-Буняковского*

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt \right| \le \int_0^{+\infty} | f(t) | dt \int_0^{+\infty} | g(t) | dt .$$

Примечание. Для произвольных L^2-функций предложение перестает быть справедливым.

16. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ(**I**)

Теорема.

1.При $a \le a_2$ *функционалы* I *и* UI *конечны.*

2.При $a > a_2$ *всегда найдутся управления в классе допустимых, т.е. удовлетворяющие условию (2), для которых функционалы* I *и* UI *будут иметь бесконечные значения, при условии соблюдения дополнительной пропорции в начальных условиях задачи:*

$$\frac{Y(0) - lP(0) - mF(0)}{P(0) + F(0)} > \frac{a_2 k(0) + \rho}{a - a_2}. \qquad (1)$$

17. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯФУНКЦИОНАЛОВ(**II**)

Таким образом, нами установлены два качественно различных режима поведения модели:

- ограниченность суммарного дисконтированного потребления для любого допустимого управления (вариант $a \le a_2$);
- наличие допустимых управлений, реализующих бесконечное суммарное дисконтированное потребление (вариант $a > a_2$).

Основным фактором, влияющим на качественное поведение исследуемой модели, является соотношение между параметрами производственной функции a, a_2. При этом линия $a = a_2$ в сочетании с (1) является бифуркационной для построенной динамической модели .

18. ПРИМЕР ОГРАНИЧЕНИЙ НА НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ В БИФУРКАЦИОННОЙ ДИАГРАММЕ

Зададим следующие величины для параметров модели и начальных условий:

$$a=0{,}16; a_1=0{,}92, a_2=0{,}08, l=0{,}05; m=0{,}08;$$
$$k(0)=0{,}05;\ P(0)=245; F(0)=2910.$$

Такой набор параметров соответствует наукоемкой экономике. Величину дисконта установим исходя из средней инфляции доллара США за период 1939-79 г.г. Согласно статистике инфляция за этот период составляет $387{,}86\%$. Такой инфляции соответствует величина дисконта $\rho=3{,}445\%$. Чтобы выполнить (6), необходимо ограничить выпуск снизу: $Y(0)>1783$. Этому соответствует ограничение на нижнюю границу начальной фондоотдачи

$$\varphi(0)=\frac{Y(0)}{P(0)+F(0)}$$

в виде $\varphi(0)>0{,}565$.

19. ИНФОРМАЦИОННАЯ ПОДДЕРЖКА МОДЕЛИ (**I**)

Статистический эксперимент модели был проведен по экономике США. Для периода с 1929 по 1969 г.г. использовалась статистика из исследования Дж. Кендрика ([10-11]). Величины $Y(t), P(t), F(t)$ оцениваются в сопоставимых ценах в млрд. долл. по курсу 1958г., а $R(t)$ в млн. BTU (британская термическая единица), как это принято в статистике Кендрика.

Для последующего десятилетия (1969-1979 г.г.) использовалась статистика Э. Денисона ([12-16]). В статистике Денисона в качестве стоимостного измерителя капитала и выпуска используются доллары США 1972 г., т.е. первого года после отмены "золотого стандарта". Для сопоставления различных измерителей в качестве инфляции доллара США за период с 1958 г. по 1972 г. принята величина 45%.

20. ИНФОРМАЦИОННАЯ ПОДДЕРЖКА МОДЕЛИ (**II**)

Сводная статистика в млрд. долл. США 1958 г. для экономики США на периоде 1929-1979 г.г. приведена в таблице:

Таблица. Совокупный капитал США на периоде 1929-1979 г.г.

T=	1929	1934	1939	1944	1949	1954	1959	1964	1969	1974	1979
P(t)	4,6	6,6	9,0	15,5	23,1	37,7	65,2	97,2	127,6	166,8	243,8
F(t)	847	784	848	939	1101	1256	1440	1685	2126	2463	2911
Y(t)	231	170	237	289	351	416	488	591	726	817	956
R(t)	2796	1801	2175	2276	2915	3394	3902	4568	5595	6276	6817

21. СТАТИСТИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

На базе погодовой статистики, фрагментарно приведенной в таблице 1, была произведена идентификация параметров производственной функции для экономики США.

Использовался метод наименьших квадратов применительно к логарифмам величин выпуска, фондов и энергии. Среднее квадратическое отклонение эмпирической величины выпуска от теоретической не превысило 3% от его средней эмпирической величины.

Для периода 1929-69 г.г. получены следующие значения параметров производственной функции :

$$a = 0{,}05,\ a_1 = 0{,}92,\ a_2 = 0{,}08,\ A = 0{,}251.$$

Описанная в таблице 1 экономика США периода 1929-69 г.г. оказывается энергоемкой, но, при этом, находится на переходе к наукоемкой.

Для периода 1939-1979 г.г. более хорошую аппроксимацию дает производственная функция, в которой показатель, отвечающий за фактор знаний имеет слабый рост и принимает значение $a = 0{,}06$ (при тех же значениях показателей производственного a_1=0,92 и энергетического a_2=0,08факторов).

22. ВЫВОДЫ

Экономическая интерпретация полученных результатов состоит в том, что при определенном сочетании факторов, описывающих экономику, научно-технический прогресс может компенсировать истощение природного ресурса. Точка бифуркации построенной модели определяется соотношением на параметры производственной функции, описывающей экономику. Бифуркация может интерпретироваться как переход от энергоемкой $a \le a_2$ к наукоемкой экономике $a > a_2$. Кроме условия на показатели знаний и ресурса в производственной функции: a, a_2,,для существования управления с бесконечным ростом функционала I необходимо соблюдение определенного соотношения между начальной фондоотдачей, темпом истощения запасов, параметрами старения знаний, износа фондов, дисконтом, а также пропорцией между капиталом в секторе знаний и производственным сектором.

По итогам статистического анализа экономика США на периоде 1929-69 г.г. оказывается энергоемкой. При переходе к периоду, 1939-1979 г.г., наблюдается рост, хотя и незначительный, фактора НТП. Это подтверждает тенденцию на переход экономики США от энергоемкой к наукоемкой.

23. ОБОСНОВАНИЕ L^1 –АНАЛОГА НЕРАВЕНСТВА КОШИ-БУНЯКОВСКОГО ДЛЯ КВАНТИФИЦИРОВАННЫХ УПРАВЛЕНИЙ

.

Для класса квантифицированных управлений с учетом того, что длина временного такта равна единице, имеем:

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \ , \ \int_0^{+\infty} g(t)dt = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i \text{ и } \int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i b_i \ .$$

Отсюда L^1-аналог неравенства Коши-Бунякоаского сводится к непосредственно проверяемым неравенствам :

$$|\sum_{i=1}^{+\infty} a_i b_i| \le \sum_{i=1}^{+\infty} |a_i b_i| \le \sum_{i=1}^{+\infty} |a_i| \sum_{i=1}^{+\infty} |b_i| \ .$$

Метод конечно-временных аппроксимаций в задачах оптимального управления широко применялся К.О. Бесовым ([19]).

24. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОГРАНИЧЕННОСТИ *I*, *UI* при $a<a_2$

Заметим, что $R(t) \le Q(0)$.

Отсюда $I \le I' = \int\limits_0^{+\infty} (A(Q(0)+1)P^a F^{a_1} - lP - mF)\exp(-\rho t)dt$.

Введем $\begin{array}{l} D = A(Q(0)+1), s = \min(l,m), \\ f = 1 + a - a_2, U = \max(P,F) \end{array}$ Имеем $I' \le \int\limits_0^{+\infty} (DU^f - sU)\exp(-\rho t)dt$.

Важно подчеркнуть, что $f < 1$,

а подинтегральная функция неотрицательна всюду,

где выполняется неравенство

$$U^{1-f} < \frac{D}{s},$$

что эквивалентно неравенству

$$P, F \le \left(\frac{D}{s}\right)^{\frac{1}{a_2 - a}},$$

откуда следует ограниченность функционала I', а, значит, и I .

Здесь также получается ограниченность сверху функционала UI

для выпуклой функции $U(C) = \ln(C)$,

так как для любого допустимого управления W имеем $UI \le I$.

25. ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМИ *I*, *UI* (a>a_2) , I

Построим управления, приводящие к неограниченности функционалов I и UI. Зададим

$$\begin{cases} P(t) = P(0)\exp(gt), \\ F(t) = F(0)\exp(xt), \\ Q(t) = Q(0)\exp(-kt). \end{cases} \qquad (2)$$

Заметим, что в (7) используется непрерывное время, однако, переход к дискретному времени (4) приводит к замене экспоненциальных зависимостей на геометрические прогрессии и не меняет качественной картины поведения функционала I. Условия неограниченности функционала I для управления (2) приобретают вид:

$$\begin{cases} ag + a_1 x - a_2 k > g + \rho, \\ ag + a_1 x - a_2 k > x + \rho. \end{cases} \qquad (3)$$

Обозначим $n = ag + a_1 x - a_2 k$. Тогда динамика выпуска имеет вид $Y(t) = Y(0)\exp(nt)$. Положим $h_1 = n - g - \rho, h_2 = n - x - \rho, h = \min\{h_1, h_2\}$

26. ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМИ *I*, *UI* ($a>a_2$) , **II**

Тогда условия неограниченности функционала I для (3) преобразуются к виду: $h>0$. Условия $h_1=h_2=0$ приводят к решению

$$g_0=x_0=\frac{ka_2+\rho}{a-a_2}\ .$$

Ограничение на начальные условия, при которых получается непустая область, приобретает вид:

$$Y(0)>(l+g)P(0)+(m+x)F(0). \quad (4)$$

(4) удобно преобразовать к виду

$$\frac{gP(0)+xF(0)}{P(0)+F(0)}<\frac{Y(0)-lP(0)-mF(0)}{P(0)+F(0)}. \quad (5)$$

Из (3), (5) вытекает условие (1) теоремы. Если теперь дополнительно потребовать, чтобы $h\geq h_0>0$, то для некоторой положительной константы H имеем

$$C(t)\geq H\exp((h_0+\rho)t)\ .$$

Отсюда следует неограниченность как самого функционала I , так и UI с выпуклой функцией $U(C)=\ln(C)$.

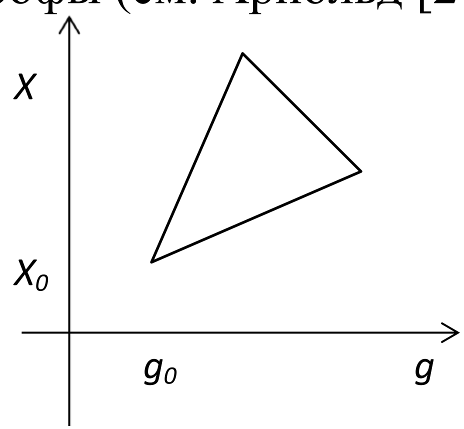
27. БИФУРКАЦИОННАЯ ДИАГРАММА

Введем отношения стартовых капиталов в технологическом и производственном секторах к общему капиталу: $\pi(0) = \dfrac{P(0)}{P(0)+F(0)}$,

$$\chi(0) = \frac{F(0)}{P(0)+F(0)} .$$

Тогда (4) преобразуется к виду: $\varphi(0) > (l+g)\pi(0) + (m+x)\chi(0)$.

Построенная точка бифуркации рассматриваемой модели дает пример малоразмерной катастрофы (см. Арнольд [20], Постон и Стьюарт [21]).



28.ЛИТЕРАТУРА I

1. **Solow R.M. Intergenerational equity and exhaustible resources / / Rev. of Econ. Studies Symposium. 1974. Vol.40,P.29-45.**
2. **Stiglitz J.E. Growth with exhaustible natural resources: efficient and optimal grawth path / / Rev. of Econ. Studies Symposium. 1974. Vol.40, P. 123-137.**
3. **Suzuki H. On the possibility of steadily drawing per capita consumption in an economy with a wasting and non-replenishable resource / / Rev. of Econ. Studies. 1976. Vol.42, N2. P.527-535.**
4. **Chiarella C Optimal depletion of a nonrenewable resourse when technological progress is endogenous //Exhaustible Resourse, Optimality and Trade / / M.C. Kemp and N.V.Long(eds)//Amst.: North Holland, 1980, P.81-93.**
5. **Takayama A. Optimal technical progress with exhaustible resource / / Exhaustible Resouces. Optimality and Trade./ / M. C. Kemp and N.V.Long (eds)/ / 1980. P.95-110.**
6. **Петров А.А., Поспелов И.Г. “Системный анализ развития экономики: учет научно-технического прогресса .IV”, Изв. АН СССР Серия “Техническая кибернетика”. 1979. № 5, сс.7-18.**
7. **Hellman O. “Aone-sector dynamic model of the economy of a country” Математическое моделирование, 1990, т.2, № 6, сс. 64-79.**
8. **Китайгородский В.И., Лукацкий А.М. Модель оптимального управления экономического роста в условиях эндогенного технического прогресса и истощения природных ресурсов // Математич. моделир., 1994, т. 6, № 7, С. 71-83.**
9. **Лукацкий А.М. “Модель оптимального управления экономическим ростом в условиях эндогенного научно-технического прогресса и истощения природных ресурсов”, XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014 Москва 16-19 июня 2014 г., сс. 5542-5548.**

29.ЛИТЕРАТУРА **II**

10. **Кендрик Дж.- "Совокупный капитал США и его формирование". М.: Прогресс, 1978.**
11. **Кендрик Дж. “Экономический рост и формирование капитала”, Вопросы экономики, 1976, № 11.**
12 **Denison E.F. Accounting for United States Economic Growth, 1929-69, Washington D. C., 1974.**
13 **Denison E.F. Trends in American Economic Growth, 1929-82, Wasington: Brookings Institution, XXY, 1985.**
14 **Denison E.F. Estimates of Productivity Changes by Industry: An Evaluation and an Alternative, Brookings Institution, 1989.**
15 **Денисон Э.Ф. “Вклад знаний в экономический рост: межстрановой анализ”,Советско-американский симпозиум экономистов, М.: Прогресс, 1978 (ВЭ, 1976, №4).**
16 **Denison E.F. Accounting for Slower Economic Growth: The United States in the 1970’s, Washington D. C., 1979.**
17 **Tecynology and Economics, National Academy of Engineering, 1991.**
18 **Ван дер Вее Г. История мировой экономики. 1945-1990, М.: Наука, 1994.**
19 **Бесов К.О. “О необходимых условиях оптимальности для задач экономического роста с бесконечным горизонтом и локально неограниченной функцией мгновенной полезности”, Тр. МИАН, 2014, том 284, сс. 56–88.**
20 **Арнольд В.И.- Теория катастроф., 2-ое изд., м., Изд. МГУ, 1983, 80с.**
21 **Постон Т. Стюарт И.- Теория катастроф и ее приложения., М., Мир, 1980, 608с.**

БЛАГОДАРЮ ВАС

ЗА ВНИМАНИЕ