УДК 519.85

КОНСТРУКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ СВЕРТЫВАНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

А.М. Лукацкий, Д.В. Шапот
(117186, Москва, Нагорная 31-2, ИНЭИ РАН)

e-mail: macrolab@eriras.ru

Поступило в редакцию 30.11.2007

Переработанный вариант 01.02.2008

Традиционная процедура свертывания системы линейных неравенств, основанная на алгоритме Фурье-Черникова, дополняется методами исключения зависимых неравенств, позволяющими существенно ослабить разрастание системы. Предлагаются как точные, так и приближенные методы, доведенные до алгоритмов и программной реализации. Обсуждаются результаты машинных экспериментов.

Ключевые слова : выпуклые многогранники, линейные неравенства, метод ортогональных проекций; алгоритм Фурье-Черникова, согласование диапазонов, зависимые неравенства, точная чистка зависимых, симплекс алгоритм, чистка зависимых с загрублением, вычислительные эксперименты.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании линейных моделей весьма полезной может оказаться процедура свертывания системы линейных неравенств. Геометрически эта процедура эквивалентна ортогональному проектированию многогранника на подпространства, получающиеся путем последовательного исключения независимых переменных, т.е. удаления элементов из базисного набора векторов. В дальнейшем будем ее называть *процедурой ортогонального проектирования* – ПОП. В результате ее использования формируется решение системы неравенств в явном виде, когда выбор значения любой переменной может быть сделан в пределах определяемого числового интервала. При этом для одной из переменных этот интервал является соответствующей проекцией, а для всех остальных переменных он определяется линейными функциями от выбранных значений ранее рассмотренных переменных. Подобный подход может эффективно использоваться во многих исследованиях. Здесь уместно отметить следующие направления.

Во-первых, при моделировании объектов разной природы нередко возникает ситуация, когда приходится учитывать факторы, которые сами по себе не представляют интереса для исследователя. В частности, в экономико-математических моделях подобными факторами являются замыкающие статьи различных балансов. Обычно в моделях они задаются как параметры, т.е. численно. Степень их влияния на результаты исследования модели легко определить, варьируя соответствующие числовые оценки. Однако, когда модель содержит несколько таких параметров, подобный вариантный анализ перестает быть целесообразным. Если они фиксируются в модели в виде свободных членов, то в такой ситуации удобно в качестве объекта исследования использовать проекцию исходной модели на подпространство, не содержащее рассматриваемых параметров.

Во – вторых, с помощью ПОП можно получить полное решение задачи параметрического программирования, т.е. найти в явном виде кусочно-линейную зависимость оптимального решения задачи *линейного программирования* (ЛП) от таких параметров линейной модели, как свободные члены ограничений и (или) граничные значения независимых переменных. Правда, учитывая, что в современных условиях решение стандартных задач ЛП даже высокой размерности требует незначительных затрат времени, актуальность привлечения дополнительного инструментария может вызывать сомнения.

В-третьих, явная запись системы линейных неравенств может быть весьма полезной при выборе технологически допустимых отклонений от номинальных значений параметров любых изделий, если область их работоспособности (Р) задается линейной моделью. Это позволит гораздо полней использовать Р при переходе от общепринятых взаимонезависимых допусков к системе зависимых допусков, поскольку приводит к замене вписанного в Р прямоугольного параллелепипеда на вписанный многогранник. Тем самым можно заметно уменьшить долю бракуемых изделий.

Кроме того, существуют проблемы, для решения которых использование ПОП вряд ли имеет альтернативу. К числу таких проблем следует отнести построение инструментальных средств для резкого *повышения эффективности процедур согласования решений нескольких партнеров, имеющих несовпадающие интересы,* о какой бы области человеческой деятельности ни шла бы речь. Здесь можно говорить, например, о согласовании параметров любых объектов (проектов, процедур, изделий и т.д.) в рамках технологического, коммерческого, финансового или управленческого аспектов.

В настоящей работе рассматриваются следующие вопросы:

- в порядке иллюстрации обсуждается конкретная методика использования ПОП в одном из перспективных направлений – процедурах согласования.

- излагаются и обосновываются известные правила построения ортогональных проекций многогранников и анализируются причины нерациональности их практического использования в задачах со многими переменными;

- предлагаются и экспериментально исследуются конкретные алгоритмы, устраняющие препятствия к практическому использованию ПОП. Они связаны с выявлением зависимых неравенств и «загрублением» многогранников.

1. Методика использования ПОП в процедурах согласования

Рассмотрим в общем виде соответствующую постановку задачи. Пусть имеются несколько партнеров с несовпадающими интересами, которые должны сформировать компромиссное решение по поводу численных значений ряда параметров некоторого объекта. Предположим, что для каждого j-го партнера количественную оценку y_j степени реализации его интересов можно получить с помощью решения соответствующей задачи ЛП со специфической совокупностью независимых переменных (X^j), но с общим набором согласуемых параметров C. Эта задача предполагает запись линейной целевой функции $y_j = h_j(X^j,C)$ и области допустимых решений в виде системы линейных равенств и неравенств

$$\{l_{ji}(X^j,C) \geq 0\}\ i = 1,2,...,r_j \qquad (1.1)$$

Здесь функции h_j и l_{ji} предполагаются линейными как по переменным X^j, так и по компонентам вектора параметров C.

Целесообразно использовать двухэтапную процедуру согласования. На первом этапе следует договориться, во-первых, о возможных (допустимых) диапазонах ΔC варьирования параметров C, а, во-вторых, об одинаковом для всех партнеров предельно допустимом относительном снижении q максимально достижимого индивидуального эффекта y_j^0 при заданных диапазонах ΔC. На втором этапе производится выбор конкретных значений согласуемых параметров. Для резкого повышения эффективности переговоров на втором этапе предлагается предварительно выполнить следующую совокупность вычислительных операций.

1) Каждый партнер определяет значение y_j^0, решая соответствующую задачу ЛП$_j$, в которой параметры C рассматриваются как независимые переменные, варьируемые в согласованных диапазонах.

   Если хотя бы для одного партнера ограничения соответствующей задачи ЛП$_j$ окажутся несовместными, то процедура выбора компромиссных значений параметров C не имеет смысла. В этом случае придется либо расширять допустимые диапазоны ΔC, либо отказаться от поиска совместного решения. Будем считать, что для всех партнеров существуют и найдены предельные значения y_j^0.

2) Каждый партнер строит проекцию на подпространство параметров C многогранника, задаваемого системой (1.1) и дополнительным неравенством

$qy_j^0 \leq h_j(X^j,C) \leq y_j^0$, где $C \in \Delta C$. Эта проекция будет представлена следующим набором линейных неравенств:

$$P_j(C) = \{p_{ij}(C) \geq 0\},\ i = 1,2,...,s_j \qquad (1.2).$$

Полученные результаты позволяют построить область *совместных решений* всех партнеров в пространстве согласуемых параметров C в виде $P(C) = \cap_j P_j(C)$. Для этого достаточно «объединить» (1.2) по всем j, построив единую систему линейных неравенств $\{p_{ij}(C) \geq 0\}_j$.

3) Построение проекции многогранника $P(C)$ на ось любого (лучше наиболее «дискуссионного») из согласуемых параметров. В результате окажется возможным выяснить является ли $P(C)$ пустым множеством. В подобном случае придется либо уменьшить общий нижний предел индивидуальных эффектов q, либо отказаться от поиска совместного решения. Если $P(C)$ не пусто, то можно реализовать второй этап процедуры поиска компромисса.

На втором этапе производится последовательный выбор численных значений согласуемых параметров в обратном порядке, относительно того, в котором проводилось их исключение при построении проекции $P(C)$. На каждом шаге этой последовательной процедуры ее участникам предъявляется сформированный с помощью результатов проведенных вычислений числовой диапазон допустимых для всех партнеров значений очередного рассматриваемого параметра. Этот диапазон зависит, в частности, и от выбранных значений ранее согласованных параметров. После согласования всех компонентов вектора C партнеры могут оценить с помощью соответствующей задачи ЛП достигнутый для каждого из них уровень y_j. Очевидно, что при желании партнеров процедура выбора конкретных значений согласуемых параметров может быть многократно повторена. Важно подчеркнуть, что при каждой подобной попытке, реализуемой в рамках непосредственного переговорного процесса, всем партнерам гарантирован положительный результат в ранее согласованных пределах. А в случае объективной невозможности достижения подобного результата этот факт выявляется до начала основных переговоров.

2. Ортогональное проектирование. Алгоритм Фурье

Пусть $\mathbf{R}^n$ действительное n-мерном пространство. *Проекцией* множества $Q_n \subset \mathbf{R}^n$ на подпространство $\mathbf{R}^{n-k}$ называется множество

$$P_kQ_n = Q_{n-k}: \quad \begin{pmatrix} \forall x' \in Q_{n-k} \exists u' \in R^k : (x', u') \in Q_n \\ \forall y' \notin Q_{n-k} \bar{\exists} v' \in R^k : (y', v') \in Q_n \end{pmatrix}.$$

Общий алгоритм построения проекций, к сожалению, возможен лишь для выпуклых множеств, задаваемых линейными неравенствами, хотя в некоторых частных случаях эту задачу удается решать и для нелинейных выпуклых множеств (см., например, [1]).

Рассмотрим непустое ограниченное множество Q_n, задаваемое системой линейных неравенств :

$$Q_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i + b_j \geq 0, (j = 1,2,..m) = J \right\} .$$

Пусть необходимо построить $Q_{n-1} \subset \mathbf{R}^{n-1}$, где $\mathbf{R}^{n-1}$ не зависит от некоторой переменной x_r. Согласно алгоритму свободного свертывания систем линейных неравенств, предложенного Фурье, разобьем множество индексов J на три группы: $Q^{(1)} = (\nu = 1,\ldots s)$; $Q^{(2)} = (\mu = s+1,\ldots,p)$; $Q^{(3)} = (\lambda = p+1,\ldots,m)$ так, что $a_{\nu r}>0$; $a_{\mu r}<0$; $a_{\lambda r}= 0$.

Разрешив каждое из неравенств первых двух групп относительно x_r, получим

$$\left\{ l_\nu = \frac{1}{a_{\nu r}}(-\sum_{i\neq r} a_{\nu i}x_i - b_\nu) \right\} \leq x_r \leq \left\{ l_\mu = \frac{1}{|a_{\mu r}|}(\sum_{i\neq r} a_{\mu i}x_i + b_\mu) \right\} \qquad (2.1)$$

$\nu = 1\ldots,s$ $\qquad\qquad \mu = s+1\ldots,p$

Исключив из этих соотношений x_r, т.е. скомбинировав каждое неравенство первой группы с каждым неравенством второй группы, получим $P_1Q_n = Q_{n-1}$, образованное $s(p-s)$ неравенствами вида

$$\left\{\sum_{i\neq r}\left(\frac{a_{\mu i}}{|a_{\mu r}|}+\frac{a_{\nu i}}{a_{\nu r}}\right)x_i+\left(\frac{b_\mu}{|a_{\mu r}|}+\frac{b_\nu}{a_{\nu r}}\right)\geq 0\right\}\nu=1,...,s;\mu=s+1,...,p \qquad (2.2)$$

и m-p неравенствами третьей группы.

В самом деле, $\forall x'\in Q_{n-1}\ \ \alpha(x')=\max\limits_{\nu=1,s}\{l_\nu(x')\}\leq\min\limits_{\mu=s+1,k}\{l_\mu(x')\}=\beta(x')$ и тогда $\forall x_r\in[\alpha(x'),\beta(x')]\ \ (x',x_r)\in Q_n$ С другой стороны, если x'' не удовлетворяет (ν_0,μ_0) -му неравенству из (2.2), то любое x_r, удовлетворяющее ν_0 неравенству из (2.1), противоречит μ_0 неравенству и наоборот.

Если первая или вторая группа неравенств пуста, т.е. $\forall j\in J a_{jr}\geq 0(\ a_{jr}\leq 0)$, то для любого x', удовлетворяющего неравенствам третьей группы $\left(\ x'\in Q^{(3)}\ \right)$ и любого $x_r\geq\alpha(x')(x_r\leq\beta(x'))$ имеем $(x',x_r)\in Q_n$. Поэтому в таком случае получаем $P_1Q_n=Q_n^{(3)}$.

С помощью рассмотренного алгоритма можно исключить любое количество переменных и построить ортогональную проекцию $P_kQ_n\ \subset\mathbf{R}^{n-k}$, где $1\leq k\leq n$. Поскольку все вычисления выполняются в матричной записи, то множество Q_n задается матрицей, которую обозначим M_0. Тогда проекция P_kQ_n, формируемая в результате исключения k переменных, задается матрицей M_k. Если k = n-1, то M_k содержит только столбец x_n и столбец свободных членов. Ей соответствует формула (2.1) в таком виде: $\underline{x}_n\leq x_n\leq\overline{x}_n$, где $\underline{x}_n=\max(b_1,b_2,...,b_s),\overline{x}_n=\min(b_{s+1},b_{s+2},...,b_{s+p})$. Подобная запись дает возможность выбрать любое значение переменной $x_n=x_n^0$ из проекции Q_n на ось x_n, т.е. допустимое значение. Аналогичная ситуация возникнет, если в матрице M_{n-2} умножить столбец x_n на x_n^0. И вообще, при «спуске по последовательности матриц M_k» после выбора произвольных допустимых значений переменных $x_k=x_k^0$, k=n-1,n-2,…,n-k и умножения на них соответствующих столбцов матрицы M_k получим допустимый диапазон для выбора значения переменной x_{n-k-1}.

Поэтому можно утверждать, что последовательность матриц M_k , k=n-1, n-2,…,1 задает в явном виде решение системы неравенств, определяемой Q_n.

Рассмотренный алгоритм Фурье, несмотря на кажущуюся простоту, практически применим лишь для простейших систем неравенств. Необходимость комбинирования всех (μν)-ых пар при исключении каждой переменной приводит к стремительному росту числа неравенств по мере исключения переменных. В частности, если после исключения k -1 переменной получена система из r_{k-1} неравенств, то после исключения k - ой переменной получим $r_{k-1}-1 \le r_k \le (r_{k-1}/2)^2$. Нижняя граница r_k реализуется в том случае, когда $p = m$ и $s = 1$, либо p-s = 1, а верхняя граница, - когда $p = m$ и $s = r_{k-1}/2$. При этом значительная доля сформированных неравенств являются зависимыми. Так, если r_0 =10, то достижимой верхней оценкой для r_5 является 2×10^{13} неравенств.

Таким образом, интенсивное разрастание количества неравенств по мере исключения переменных является основным препятствием для применения ПОП в практически значимых задачах. Для его преодоления необходимо, прежде всего, иметь эффективные алгоритмы выявления зависимых неравенств, формируемых при использовании алгоритма Фурье. В дальнейшем будем их называть алгоритмами «чистки матриц».

3. Методы чистки матриц

3.1 Алгоритм Фурье-Черникова

Серьезное усовершенствование алгоритма Фурье, связанное с отказом от формирования зависимых неравенств, предложено в работах Моцкина [2] и Черникова [3]. Снабжая каждое неравенство исходной системы неравенств первичным индексом (номером) и объединяя множества первичных индексов при комбинировании пар неравенств, Черников дополнил алгоритм Фурье следующими двумя правилами:

- \- при исключении h - ой по счету переменной должны комбинироваться только те пары неравенств, которые образуют индекс, содержащий не более h+1 первичных индексов (*первое правило Черникова* – 1ПЧ);
- \- не следует комбинировать пары, содержащие полный индекс какого-либо другого неравенства (*второе правило Черникова* – 2ПЧ).

В алгоритме *Фурье–Черникова* (Ф-Ч) 1ПЧ проверяется в процессе комбинирования неравенств по Фурье, а 2ПЧ проверяется после формирования всех комбинаций не противоречащих 1ПЧ. С помощью правил Черникова выявляются все зависимые неравенства на всем ансамбле многогранников, т.е. для систем однородных неравенств. Однако, для неравенств с заданными свободными членами эти правила выявляют далеко не все зависимые неравенства.

Справедливость этого утверждения наглядно иллюстрирует относительно простой численный пример. Для формирования этого примера и последующих вычислительных экспериментов нами использован генератор задач ЛП общего вида:

система неравенств: $y_j = \sum_{i=1}^{N} a_{ji}x_i + b_j$, $j = 1,..., N$, где

$a_{ji} = (1/3)(5i/(j+i)^{0.5}(-1)^{((j+i)/3-1)}$, если $(j+i)/3$ – целое и $a_{ji}=0$ в противном случае;

$b_j = (1/3+(-1)^j)/j^{0.5}$. Целевая функция: $\sum_{i=1}^{N} c_i x_i \Rightarrow \max$, $c_i = (-1)^{(i+1)}/i$. Граничные значения независимых переменных: $1 \le x_i \le 4$, $i = 1,2,. ,N$

В данном примере принято N = 10, а целевая функция игнорируется. Количество неравенств, формируемых в ходе исключения переменных, без выявления зависимых неравенств, а также с их устранением приведено в таблицах 3.2 и 3.2.

Таким образом, перспективы практического применения алгоритмов свертывания существенным образом зависят от возможности выявления зависимых неравенств, формируемых в рамках алгоритма Ф-Ч. Следует отметить, что в своей монографии [3] С.Н.Черников рассмотрел и метод полной чистки всех зависимых неравенств с фиксированными свободными членами. Этот метод основан на вычислении фундаментальных систем образующих конусов, связанных с системами линейных неравенств. Соответствующий алгоритм имеет полиномиальную оценку зависимости количества операций от мощности системы линейных неравенств. Поскольку в процессе свертывания может возникать стремительный рост количества неравенств, применение подобного алгоритма для практически значимых задач не представляется возможным.

Таблица 3.1 Без выявления зависимых неравенств

№ итерации	По Фурье	После 1ПЧ	После 2ПЧ
1	26	26	26
2	60	34	34
3	115	46	46
4	298	106	106
5	1466	212	212
6	8023	393	391
7	30775	743	743
8	124743	1259	1248
9	361247	2102	2102

Таблица 3.2 С удалением зависимых неравенств

№ итерации	По Фурье	После 1ПЧ	После 2ПЧ	Полная чистка
1	25	25	25	18
2	28	21	21	15
3	20	16	16	12
4	17	16	16	13
5	22	17	17	10
6	10	10	10	8
7	14	13	13	8
8	16	11	11	4
9	6	5	5	5

3.2 Конструктивный подход к выявлению зависимых неравенств в многогранных множествах.

Проблема выявления зависимых неравенств является весьма актуальной для разных приложений. Она рассматривалась разными авторами как в контексте метода проекций [5-7], так и самостоятельно [8-10]. Ранее нами были разработаны и программно реализованы несколько подходов к выявлению зависимых неравенств в линейных системах [4]. Предлагаемый в настоящей работе алгоритм является развитием упомянутой работы.

Рассмотрим один из возможных подходов к выявлению зависимых неравенств после каждой итерации алгоритма Ф-Ч. Он носит универсальный характер и не связан со спецификой процедуры ортогонального проектирования. Для того, чтобы гарантировать ограниченность исследуемого многогранника, потребуем априорного задания верхних и нижних границ для всех независимых переменных. Эти границы должны определять интересующую исследователя область наблюдения модельных объектов в виде прямоугольного параллелепипеда. Однако, в том случае, когда любое из параллелепипедных ограничений оказывается зависимым, его следует удалять из соответствующей матрицы, как и всякое другое зависимое неравенство.

Напомним, что неравенство $l(x) \geq 0$ является *зависимым* от некоторого множества Q, если оно выполняется в каждой точке этого множества и *несовместным с* Q, если оно не выполняется ни в одной точке $x \in Q$.

Анализ условий зависимости и несовместности неравенства $l(x) \geq 0$ по отношению к множеству Q может опираться на любой из следующих эквивалентных и очевидных признаков.

П-1: *Для того, чтобы неравенство* $l(x) \geq 0$ *было: а) зависимым от* Q *, либо*

б) несовместным с Q*,*

необходимо и достаточно выполнения условия: а) $\min_{x\in Q} l(x) \geq 0$,

б) $\max_{x\in Q} l(x) < 0$.

П-2. *Неравенство* $l_\nu(x) \geq 0$ *зависимо от* $Q = \{l_j(x) \geq 0\}, j \neq \nu$ *тогда и только тогда, когда оно представимо как* $l_\nu = \sum_{j\neq\nu} u_j l_j + u_0$, *при некоторых* $u_0, u_j \geq 0$.

П-3. *а) Устранение из системы неравенств любого независимого неравенства приводит к расширению области допустимых решений. Это значит, что* $Q \neq Q_\nu \ldots и \ldots Q \subset Q_\nu$

б) Устранение из системы неравенств любого зависимого неравенства не приводит к расширению области допустимых решений. Это значит, что $Q = Q_\nu$

В общем случае, когда исследуется зависимость неравенства $l_j(x) \geq 0$ от множества

$$\overline{Q}_j = \left\{ \underline{x}_i \leq x_i \leq \overline{x}_i, i = 1,\ldots,n, l_\nu(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i} x_i + b_\nu \geq 0, \nu = 1,\ldots,m; \nu \neq j \right\},$$

достаточно воспользоваться утверждением П-1 и решить соответствующую задачу ЛП. Однако нас интересует полная чистка матриц в рамках ПОП, когда возможно интенсивное возрастание числа неравенств по мере исключения переменных. Будем считать, что на очередном шаге ПОП после реализации алгоритма Ф-Ч сформированная система из m неравенств может содержать заметное количество зависимых неравенств. В этой ситуации «лобовой подход», основанный на использовании П-1, для «испытания» *m* неравенств предполагает решение *m* задач ЛП. Очевидно, что такой подход является мало привлекательным. Рассмотрим принципиально другой путь резкого сокращения объема соответствующих вычислений при проверке независимости неравенств.

Пусть для системы

$$Q = \{\underline{x}_i \leq x_i \leq \overline{x}_i, i = 1,\ldots,n, l_s(x) \geq 0; s = 1,2,\ldots m\} \quad (3.1),$$

полученной после очередного шага ПОП, найдено опорное решение. Напомним, что решение системы неравенств Q, задающее n-мерное многогранное множество, называется опорным, если оно удовлетворяет всем ограничениям и, по крайней мере, n неравенств обращает в равенства. Опираясь на рассмотренные ниже условия, можно проверить зависимость всех неравенств, соответствующих *матрице опорного решения* (МОР). Предварительно уточним некоторые термины.

Переменные x_i в выражении (3.1) в дальнейшем изложении будем называть независимыми, а переменные l_s - зависимыми. Вместе с тем, относительно любой симплекс-матрицы будем говорить о *столбцовых* и *строчных* переменных. Любой из из этих переменных ставится в соответствие требование ее неотрицательности. Например, паре неравенств $a \le l_s(x) \le b$ сопоставляют зависимые переменные $z_l = l_s(x) - a \ge 0 \ldots z_h = b - l_s(x) \ge 0$, а в частном случае $l_s(x)=x$ производится замена переменных $z = x\text{-}a$, где $0 \le z \le b\text{-}a$. Поэтому каждому неравенству соответствует одна из переменных. Кроме того, в дальнейшем относительно множества Q и зависимого неравенства $l_j(x) \ge 0$ будем говорить о зависимом неравенстве:

а) *1-го рода*, если $\forall x \in Q$ *имеем* $l_j(x) > 0$ и

б) *2-го рода*, если $\forall x \in Q$ *имеем* $l_j(x) \ge 0$ *и* $\exists x : x \in Q,\ l_j(x) = 0.$

Анализ зависимости неравенств, задающих многогранное ограниченное множество, может опираться на приведенные ниже условия.

Для строчных переменных.

1. Если после очередного шага *жорданова исключения* (ЖИ) в ходе построения или исследования МОР обнаружится x_s-ая строка со всеми неотрицательными коэффициентами, включая свободный член, то в соответствии с П-2 неравенство $x_s \ge 0$ зависимо, а x_s-ая строка вычеркивается из матрицы.

Для столбцовых переменных.

2. Если в МОР все свободные члены положительны, то требованиям неотрицательности всех столбцовых переменных соответствуют независимые неравенства.

Действительно, если для любой столбцовой переменной x_s дать отрицательное приращение $\delta x_s < 0$, то свободные члены каждой *j*-ой строки b_j будут иметь значение $b'_j = b_j - a_{js}|\delta x_s|$. Если a_{js} = 0, то $b'_j = b_j$, если a_{js}<0, то $b'_j > b_j$, если a_{js}>0 и $|\delta x_s| \le \min_j b_j / a_{js}$, то $b'_j \ge 0$. Это значит, что существует отрезок $-\delta x \le x_s \le 0$, на котором нарушается только одно неравенство $x_s \ge 0$. Поэтому в соответствии с П-3 это неравенство является независимым.

Далее будем полагать, что первым *p* строкам МОР соответствуют однородные неравенства, которые имеют нулевые свободные члены. В этом случае все столбцовые переменные, а именно x_s, соответствуют неравенствам, которые на основании П-1 не являются зависимыми 1-го рода. Любому из x_s соответствует либо независимое неравенство, тогда это неравенство задает грань многогранника *Q*, либо зависимое неравенство 2-го рода, тогда это неравенство задает касательную гиперплоскость множества *Q*. Необходимо установить являются ли *q* из них ($0 \le q \le p$) зависимыми неравенствами 2-го рода. Соответствующий анализ основан на следующем свойстве зависимых неравенств 2-го рода.

П-4. Если $l_j(x) \ge 0$ зависимое неравенство 2-го рода, то $F = Q_j \bigcap (l_j(x) = 0) \ne \Lambda$ и $F \subset \mathbf{R}^k$, где $0 \le k \le n-2$. $\mathbf{R}^k$ *есть k-мерное действительное пространство.*

В самом деле, множество *F* не пусто, поскольку в противном случае $l_j(x) \ge 0$ являлось бы зависимым неравенством 1-го рода. Пусть $x^0 \in F$. Рассмотрим в малой окрестности x^0 точку $x' : l_j(x') = 0, x' \in \mathbf{R}^{n\text{-}1}$. Если отрезок $[x^0, x'] \subset Q$, то в малой окрестности x' найдется точка $x'' : l_j(x'') < 0, \dots x'' \in Q_j$. Но тогда $\min_{x \in Q_j} l_j(x) < 0,$ что противоречит П-1. Значит, $[x^0, x'] \not\subset Q$, поэтому $k<n$-1.

Очевидна справедливость следующего противоположного утверждения.

П-4′. Если $l_j(x) \geq 0$ независимое неравенство, то

$F = Q_j \bigcap (l_j(x) = 0) \neq \Lambda$ и $F \subset \mathbf{R}^{n\text{-}1}$.

Следствием П-4 является условие 3.

3. Столбцовое неравенство $x_s \geq 0$ является независимым в том и только том случае, если в плоскости x_s=0 при положительном изменении всех остальных столбцовых переменных существуют точки, в которых выполняются все однородные строчные неравенства.

Рассмотрим такое малое положительное смещение d из точки опорного решения одновременно по всем столбцовым переменным, при котором не нарушается ни одно из *неоднородных* строчных неравенств. Пусть $x_s = 0, \forall x \neq s$ *имеем* $x_i = u_i d, q \leq u_i \leq 1,$ где q малое положительное число, например, q = 0.0001. При этом 0< $x_i \leq d$. Запишем систему однородных строчных неравенств $\sum_{i \neq s} a_{ji} x_i = d \sum_{i \neq s} a_{ji} u_i \geq 0$ *или* $\sum_{i \neq s} a_{ji} u_i \geq 0,\ j \in [1, p]$.

Сделав замену переменных $v_i = u_i - 0.0001$, получим

$$\sum_{i \neq s} a_{ji} v_i + 0.0001 \sum_{i \neq s} a_{ji} \geq 0,\ j \in [1, p],\ 0 \leq v_i \leq 0.9999. \qquad (3.2)$$

Согласно условию 3, неравенство $x_s \geq 0$ является независимым в том и только том случае, если система (3.2) совместна, т.е. если для нее можно найти опорное решение.

С помощью п.3 можно выявить все зависимые столбцовые неравенства и удалить из Q каждое из них, сделав предварительно соответствующий шаг ЖИ. Если же учесть, что любое строчное неравенство в МОР с помощью последовательности шагов ЖИ может стать столбцовым, то справедливо следующее итоговое утверждение:

Утверждение 1. С помощью правил 1-3 в МОР могут быть выявлены все зависимые неравенства.

Рассмотрим алгоритм направленного поиска такого преобразования МОР, при котором любое «неопознанное» *строчное* неравенство сможет оказаться требованием неотрицательности одной из *столбцовых* переменных. С этой целью для каждого i -го столбца МОР выполним следующие операции:

- определим множество строк J_i, для которого a_{ji}<0. Это множество не пусто, поскольку в противном случае многогранник оказался бы не ограниченным сверху по оси x_i;
- для каждого $j \in J_i$ вычислим $d_{ij} = -b_j / a_{ji}$ и упорядочим эти величины в порядке возрастания;
- определим номер (k_i) в упорядоченном ряду d_{ij} первого элемента, которому соответствует подозрительное, т.е. неопознанное неравенство.

Затем выберем любую строку x_s из тех которые отвечают условию k = min k_i,= k_r и которой соответствует d_{rs}. Сделаем шаг ЖИ с разрешающим элементом a_{sr}. В результате переменная x_s окажется столбцовой. Если k_r=1, то получим новое опорное решение, для которого проведем «стандартный» анализ в объеме рассмотренных выше пунктов 1-3. Если же k_r>1, то в новой матрице k_r-1 свободных членов окажутся отрицательными. В этом случае придется вновь воспользоваться алгоритмом поиска опорного решения с единственной особенностью: в процессе поиска запрещается возвращать x_s в состав строчных переменных. Если же при условии x_s = 0 получаем несовместную систему неравенств, то $x_s \geq 0$ является зависимым неравенством.

Возвращаясь к процедуре ортогонального проектирования, отметим, что объем вычислений при полной чистке матриц можно сократить, учитывая следующее обстоятельство. Если при исключении очередной переменной x_r матрица M_r содержит j–ые строки, для которых a_{jr}=0, а независимость соответствующих j–ых неравенств была установлена при чистке матриц на предыдущих итерациях, то повторная проверка их независимости лишена смысла. Правомерность такого подхода следует из следующего очевидного утверждения.

Утверждение 2. Если $l(x_{s+1},\ldots,x_n) \geq 0$ является независимым неравенством от множества Q_n, то оно является независмым неравенством от множества Q_{n-s} и наоборот.

Поэтому в рамках алгоритма Ф-Ч при формировании индекса каждого нового неравенства целесообразно дополнять его признаком «временной неопознанности его независимости».

3.3 Методы дополнительной чистки матриц.

С дополнительной чисткой матриц связано такое относительно небольшое искажение границ соответствующего многогранника, в результате которого некоторые независимые неравенства превращаются в зависимые. Подобное искажение границ может иметь оправдание, поскольку точность определения параметров исходной системы неравенств, как правило, не является высокой. В таких случаях положение границ следует рассматривать в некотором «приграничном слое». Но достоверное количественное описание этого слоя для ортогональных проекций, формируемых алгоритмом Фурье, вряд ли возможно даже при известной точности задания параметров исходной системы неравенств. В самом общем случае такое описание требует введения специальной меры сравнения многогранных множеств [6,7].

В принципе, искажение границ может производиться как за счет расширения, так и за счет сжатия области допустимых решений системы неравенств. Оно производится в первом случае путем отбрасывания «почти зависимых» неравенств, а во втором – путем сжатия параллелепипедных границ независимых переменных, за счет чего некоторые независимые неравенства могут превратиться в зависимые. Далее будем рассматривать лишь первый способ.

Для линейных многогранников, если они задаются большим количеством неравенств, характерна мелкоячеистая структура поверхности. Поэтому в прикладных исследованиях нередко вполне допустимо небольшое ее «загрубление» за счет отбрасывания некоторых граней, определяемых «почти зависимыми» неравенствами. Для реализации подобного подхода, прежде всего, необходимо ввести меру зависимости любого неравенства от соответствующего множества. Очевидно, что выбор этой меры является эвристическим.

Пусть $l(x) = \sum_i a_i x_i + b \geq 0$ одно из неравенств, задающих множества Q, а Q' то же множество, но при отсутствии этого неравенства. Представляется, что степень значимости этого неравенства от Q удобно характеризовать величиной пропорциональной $d = \min_{x \in Q'} l(x)$. Действительно, если вектор свободных членов системы Q не содержит отрицательных свободных членов и $d \geq 0$, то $l(x) \geq 0$ является зависимым неравенством. Если же $d<0$, то исключение его из задания Q эквивалентно увеличению свободного члена b на величину $|d|$. Эта величина пропорциональна расстоянию гиперплоскости $l(x)=0$ до наименее удаленной от нее вершины многогранника Q'(в полупространстве $l<0$), и поэтому позволяет судить о степени расширения Q. В частности, расширение проекции Q на ось x_i есть $(\cos u)d$, где u – угол между нормалью гиперплоскости $l(x)=0$ и осью x_i. Поэтому сама величина d может служить оценкой сверху подобного расширения.

Очевидно, что оценки степени зависимости каждого неравенств в Q должны быть сопоставимы друг с другом. Следовательно, они должны быть представлены в «относительных единицах», в частности, в долях соответствующих свободных членов, т.е. величиной $e = d/b$, при условии, что $b>0$. Поэтому, задавшись некоторой нормативной величиной e_0, будем считать неоднородное неравенство $l_j(x) \geq 0$ «почти зависимым» на Q, если неравенство $l_j(x) + e_0 b_j \geq 0$ является зависимым от множества Q', т.е. если $\min_{x \in Q'} l_j(x) \geq -e_0 |b_j|$.

Рассмотрим простой алгоритм для оценки степени зависимости некоторых неоднородных неравенств в МОР, содержащей только независимые неравенства. Для каждой столбцовой переменной x_s вычислим и упорядочим в порядке возрастания величины $d_{sj} = b_j / |a_{js}|$ для всех j: a_{js}<0. Пусть первое место в этом списке занимает строка (или несколько строк), соответствующая переменной x_u, а второе – переменной x_v. В случае, когда b_u=0, переходим к следующей столбцовой переменной. Если сделать шаг ЖИ с разрешающим элементом a_{vs}, то окажется, что свободный член $b'_u = b_u - b_v a_{us} / a_{vs}$ отрицателен. При увеличении b_u на величину b'_u неравенство $x_u \geq 0$ оказалась бы зависимым неравенством 2-го рода. Следовательно, $b'_u = d_u$.

Утверждение 3. Если $d_u \geq -e_0 b_u$, и среди коэффициентов *u*-той строки не окажется отрицательных, то это неравенство можно считать «почти зависимым» и исключить из МОР.

Подобные циклы вычислений следует повторять, каждый раз изменяя состав столбцовых переменных. Для оставшихся непроверенных неравенств $l(x) \geq 0$ можно использовать «лобовой способ», т.е. в соответствии с П-1 вычисление $d = \min_{x \in Q'} l(x)$. в результате решения соответствующей задачи ЛП.

3.4 Управление процессом разрастания количества неравенств при исключении переменных.

При использовании дополнительной чистки матриц можно найти простое компромиссное решение между двумя противоречивыми стимулами: стремлением не допускать слишком интенсивного разрастания числа неравенств, задающих проекции, и стремлением не допускать чрезмерного искажения поверхности многогранника. Для реализации такого компромисса зададимся двумя параметрами.

Первый из них представляет собой максимально допустимый уровень норматива загрубления неравенств (e_0) при дополнительной чистке матриц, и связанное с ним «рабочее значение» этого норматива e=0.1q e_0, где управляемая переменная q может принимать дискретные значения 0,1,2,…,9,10. Для практического использования величину e_0 целесообразно выбирать в диапазоне 0.05-0.10.

Вторым параметром является допускаемая максимальная кратность (h) возрастания числа строк в матрице при исключении переменных относительно исходной матрицы. Таким образом, допускаемое пороговое значение количества неравенств есть $PRG=hr_0$. Рациональная величина параметра h зависит от характеристик располагаемых «вычислительных ресурсов», и может колебаться в пределах 3-10.

Пусть после исключения очередной переменной x_k рабочее значение $q_k>0$, а количество неравенств в матрице есть $r_k<PRG$. Предположим, что после исключения переменной x_{k+1} с помощью алгоритма Ф-Ч и полной чистки матрицы число неравенств в ней превысило заданный порог. В этом случае проведем дополнительную чистку матрицы с нормативом e_k. Если она не обеспечит требуемого снижения величины r_{k+1}, примем $q_{k+1} = q_k + 1$, после чего снова проведем дополнительную чистку матрицы, но уже в «усиленном режиме», т.е. с нормативом e_{k+1}. Будем повторять эту процедуру до тех пор, пока не выполнится одно из двух условий:

1) $r_{k+1}<PRG$ и $q_{k+1}<10$; 2) $r_{k+1} \geq PRG$ и $q_{k+1}=10$.

В первом случае на последующих итерациях при необходимости можно продолжать усиление чистки матриц, ограничивая количество неравенств во вновь формируемых матрицах. Во втором случае процесс исключения переменных с полной и дополнительной чисткой получаемых матриц будет продолжен, однако возможность усиления дополнительной чистки окажется утеряной. Тем самым будет утерян контроль над возможным разрастанием количества неравенств в процессе последующих исключений переменных.

Если в ходе исключения переменных пришлось прибегать к дополнительной чистке матриц, то каждой k–ой итерации сопоставляется не только соответствующая матрица, но и значение норматива загрубления e_k, которое использовалось при ее формировании. Это позволяет при «спуске по пирамиде матриц» избегать выбора недопустимых решений, возникающих в результате «неправомерного» расширения многогранника. А именно, в формально вычисляемом диапазоне x_k–ой переменной $[\underline{x}_k, \overline{x}_k]$ разрешается выбирать значения x_k лишь в границах $[\underline{x}_k + \Delta_k, \overline{x}_k - \Delta_k]$, где $\Delta_k = 0.5 e_k (\overline{x}_k - \underline{x}_k)$.

4. Структура алгоритма ортогонального проектирования

Предлагаемый алгоритм формирования ортогональных проекций линейных многогранников, задаваемых системой неравенств, а, возможно, и уравнений, предусматривает выполнение следующей последовательности операций.

1) Задание *цели* построения проекции:

а) формирование соответствующей системы неравенств в заданном подпространстве; б) многократный «осознанный выбор» допустимых конкретных значений исключенных переменных при эвристическом задании конкретных значений не исключенных переменных, например, построение и использование зависимости оптимальных решений от вектора свободных членов неравенств.

2) Введение *исходных данных.* В их состав входят:

- *параметры алгоритма,* а именно, а) допускаемая максимальная кратность (h) возрастания числа строк в матрице при исключении переменных относительно исходной матрицы; б) максимально допустимый уровень (e_0) «загрубления» неравенств при дополнительной чистке матриц, формируемых в ходе исключения переменных.;

- *система неравенств и уравнений*, задающих многогранник;

- *целевая функция* при исследовании оптимизационной задачи;

- *граничные значения* независимых переменных;

Перечисленные данные задают исследуемую модель.

- количество и перечень независимых переменных, которые *подлежат исключению* (множество U).

- при выборе п.1б) перечень *варьируемых параметров модели,* представляемых в исходной матрице в виде неисключаемых независимых переменных.

3) Выполнение *первичных преобразований* заданной матрицы, которые включают в себя:

- *сдвиг нижних границ* независимых переменных к 0-му значению;
- *освобождение исходной матрицы от уравнений* за счет исключаемых части независимых переменных;
- при работе с оптимизационной задачей фиксация целевой функции $l(x)$ в виде уравнения $l(x) = c$, где c-дополнительная переменная, и превращение ее из строчной в столбцовую с помощью соответствующего шага ЖИ;

- *выявление всех зависимых неравенств* в начальной матрице без использования дополнительной чистки. При этом возможна коррекция диапазонов изменения независимых переменных за счет превращения соответствующих неравенств из зависимых 1-го рода в зависимые 2-го рода.

4) Исключение очередной независимой переменной из множества U.

- *выбор исключаемой переменной*, для которой число неравенств, формируемых алгоритмом Фурье, минимально;

- *исключение выбранной переменной* с помощью алгоритма Ф-Ч;

- поиск опорного решения, выявление и *исключение всех зависимых неравенств*;

- при необходимости *дополнительная чистка матрицы* с возможным многократным ее повторением.

5) После исчерпания множества U:

- выдача пользователю сформированной последней матрицы в случае, предусмотренном пунктом 1а);

- в противном случае (предусмотренном п.1б), с целью подготовки комфортных условий для эвристического задания значений варьируемых параметров следует продолжить исключение из матрицы всех столбцов, соответствующих варьируемых свободных членов. В результате будет получена конечная матрица с двумя стобцами: дополнительной переменной c и свободных членов. Она задает проекцию исследуемого многогранника на ось целевой функции, определяя тем самым всю достижимую область ее значений , включая ее максимум и минимум.

- возможно, многократная реализация процедуры выбора пользователем численных значений параметров и переменных модели в вычисляемых пределах с учетом использованного норматива загрубления.

5. Результаты вычислительных экспериментов

В соответствии с рассмотренным алгоритмом нами разработана *демонстрационная версия* ПОП на базе 6-ой версии языка VISUAL BASIC с 32-разрядным компилятором. При проведении ряда вычислительных экспериментов использовались следующие компьютерные ресурсы: ПК Intel-Core2 с тактовой частотой 2.67 ГГц, емкостью ОЗУ 3.25 ГБ и операционной системой Microsoft Windows XP Professional 2002.

Вычислительные эксперименты проводились с целью анализа эффективности предложенных мер по совершенствованию процедуры Ф-Ч. Исследовались матрицы, формируемые упомянутым в разделе 3.1 генератором задач ЛП. Задача ЛП использовалась для строгого контроля *точности вычислений* при реализации ПОП. В частности, сначала строится проекция всей области допустимых решений на ось целевой функции. Затем, «спускаясь» по последовательности ранее вычисленных матриц, определяется вектор максимального решений. Оценка точности этого решения проводится путем сопоставления его с результатами решения той же задачи симплекс-методом. При этом существенные расхождения допустимы лишь в том случае, если рассматриваемая задача имеет неединственное решение.

При практическом использовании процедуры кроме точности вычислений весьма существенными ее параметрами являются: 1) максимальная степень разрастания количества неравенств при исключении переменных; 2) машинное время, необходимое для исключения заданного множества переменных. Это время зависит от располагаемых вычислительных ресурсов, от специфики исходной матрицы, от количества исключаемых переменных и, наконец, от используемого алгоритма. Поэтому все наши эксперименты проводились на одном и том же компьютере, на матрицах с одной и той же структурой, с одним и тем же требованием исключения всех независимых переменных. Рассматриваемые матрицы имели лишь разную размерность (N). При этом исходная матрица содержит $2N$ строк, поскольку N строк соответствуют требованию $x_i \leq 4$. Требование $x_i \geq 0$ обеспечивается включением дополнительной строки в каждую вновь формируемую матрицу перед исключением очередной переменной x_i. Неприемлемое разрастание матриц при использовании алгоритма Ф-Ч убедительно иллюстрирует приведенный в 3.1 пример при $N = 10$. На следующем этапе исследовались возможности алгоритма с полной чисткой матриц, но без управления степенью их разрастания, т.е. без дополнительной чистки. На заключительном этапе рассматривался алгоритм с дополнительной чисткой, т.е. с «загрублением».

В оговоренных выше условиях при использовании только полной чистки приемлемое время вычислений (не более 1 часа) было получено лишь при $N = 40$. Согласно автоматически формируемому протоколу исследования оно составило 3071 сек. Фрагменты этого протокола приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1 Результаты исключения 40 переменных с полной чисткой.

№ итерации	По Фурье	После 1ПЧ	После 2ПЧ	Полная чистка
1	136	136	136	93
2	297	116	116	109
3	589	132	132	124
4	964	148	148	141
5	1452	162	162	153
6	1763	174	174	170
18	21522	722	669	489
19	38529	1212	1073	667
20	51860	903	859	544
21	47629	814	770	618
22	54498	842	811	687
23	63761	847	831	595
34	94	94	86	42
35	294	50	50	26
36	66	27	27	14
37	14	14	14	7
38	13	8	8	3

39	3	3	3	3

Поскольку в процессе исключения переменных пары неравенств, противоречащие 1ПЧ, не комбинируются, то максимальное количество сформированных неравенств наблюдалось на 19-ой итерации (1212), что соответствует разрастанию исходной матрицы в 15.15 раз. По сравнению с решением этой же задачи ЛП симплекс-методом относительная погрешность определения максимума целевой функции составила 1.05E-11. Максимальная относительная погрешность определения координат оптимальной точки составила 1.40E-9, а средняя относительная погрешность 2.17E-11. Важно отметить, что при увеличении N до 50 время решения аналогичной задачи составило уже 27366 сек. Для оценки эффективности дополнительной чистки матриц проведен эксперимент с той же матрицей (N = 40) со значением кратности возрастания h=2.5 и максимально допустимого уровня «загрубления» e_0=0.1. Отличающиеся от предыдущей таблицы фрагменты соответствующего протокола приведены в таблице 5.2

Таблица 5.2 Результаты исключения 40 переменных с дополнительной чисткой.

№ итерации	**По Фурье**	**После 1ПЧ**	**После 2ПЧ**	**Полная чистка**	**Дополнитель-ная чистка**
16	3620	394	384	218	189
17	5719	286	283	259	250
18	10044	487	482	344	331
19	17811	446	446	389	389
20	26039	509	509	407	406
21	23506	524	524	468	468
22	27093	570	570	482	482
23	27530	564	564	371	370
34	293	57	57	40	40
35	40	40	40	32	32

36	128	36	36	15	15
37	26	16	16	9	9
38	21	11	11	4	4
39	4	4	4	3	3

В первом из приведенных фрагментов представлены все итерации, на которых использовалась дополнительная чистка матриц. При этом уже на 17-ой итерации был достигнут максимальный уровень загрубления, и поэтому в дальнейшем был потерян контроль над разрастанием матриц. Максимальное количество неравенств наблюдалось после 22-ой итерации, а общее время решения задачи составило 1080 сек.

Сводные результаты всех проведенных экспериментов приведены в таблице 5.3. В ней столбцы имеют такой смысл:

1 - размерность исходной матрицы с учетом верхних границ переменных; 2 – использование дополнительной чистки матриц (да, нет); 3 – затраты машинного времени на исключение всех переменных (сек); 4 – максимальное (по итерациям) количество неравенств *после* завершения чистки матрицы; 5 – относительное отклонение от симплексного решения оптимального значения целевой функции; 6 – максимальное относительное отклонение от симплексного решения среди координат оптимальной точки; 7 – среднее относительное отклонение от симплексного решения по координатам оптимальной точки.

Таблица 5.3 Сводные результаты проведенных экспериментов.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
81 x 40	нет	3071	688	1.05E-11	1.4E-9	2.17E-11
81 x 40	есть	1080	483	2.5E-2	31.8E-2	1.44E-2
101 x 50	нет	28874	1458	2.16E-10	3.81E-6	1.44E-7
101 x 50	есть	1218	148	2.15E-2	7.5E-2	2.64E-3
201x100	есть	22453	988	2.5E-2	31.9E-2	1.89E-2

ВЫВОДЫ

Проведенные машинные эксперименты позволяют сформулировать следующие **результаты работы**.

Предложенные алгоритмы обеспечивают правильное решение поставленной задачи. Алгоритмы полной чистки матриц позволяют получить весьма высокую точность вычислений. Основным недостатком этих алгоритмов (в демонстрационной версии реализации) является не столько разрастание матриц, сколько быстрое увеличение затрат машинного времени по мере роста размерности задачи. Использование дополнительной чистки достаточно эффективно в тех случаях, когда исходная информация имеет погрешность порядка нескольких процентов.

Очевидно, что существенное сокращение затрат машинного времени могут обеспечить следующие меры:

реализация программы на базе языка программирования СИ++;

использование 64-разрядной сетки вычислений;

использование параллельных вычислительных процессов.

С П И С О К Л И Т Е Р А Т У Р Ы

1. *Шапот Д.В.* О построении ортогональных проекций точечных множеств, заданных системой неравенств. // Ж вычисл. матем. и матем. физ.. 1971. Т.11. № 5. С. 1113-1126.
2. *Моцкин Т.С., Райфа Х., Томпсон Дж.Л. и др.* Метод двойного описания // Матричные игры, М.: Физматгиз, 1961. С. 81-109.
3. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. М.:. Наука, 1968.
4. *Шапот Д.В., Лукацкий А.М.* Конструктивный алгоритм построения ортогональных проекций многогранных множеств. // Оптимизация, управление, интеллект. Иркутск: СЭИ СО РАН. 1995. № 1. С. 77-91.

5. *Бушенков В.А., Лотов А.В.* Алгоритм анализа независимости неравенств в линейной системе. // Ж вычисл. матем. и матем. физ.. 1980. Т. 20. № 3. С. 562-572.
6. *Лотов А.В.* Об оценке устойчивости и числе обусловленности множества решений системы линейных неравенств. // Ж вычисл. матем. и матем. физ.. 1984. Т.24. № 12, С. 1763-1774.
7. *Еремин И.И., Махнев А.А.* Международный семинар по алгебре и линейной оптимизации, посвященный 90-летию со дня рождения С.Н. Черникова. // Известия Уральского государственного университета. 2004. № 30. С. 183-184.
8. *Ефремов Р.В., Каменев Г.К., Лотов А.В.* Построение экономного описания многогранника на основе двойственности выпуклых множеств. // Докл. РАН. 2004. Т. 399. № 5. С. 594-596.
9. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.* Новый метод решения систем линейных равенств и неравенств. // Докл. РАН. 2001. Т. 381. № 4. С. 444-447.
10. *Гутман П.О., Иослович И.* Об обобщенной задаче Вольфа: предварительный анализ неотрицательности больших задач линейного программирования с групповыми ограничениями. // Автомат. и Телемех. 2007. № 8. С. 116-125.